

Проф. И. В. Мещерский

КУРСЪ  
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ  
МЕХАНИКИ.

Часть II-ая.

ИЗДАНИЕ

КАСОВЪ ИЗДАТЕЛЬНОМУ СТУДЕНТОВЪ ПОЛИТЕХНИЧЕСКАГО УЧЕБНАГО ЗАВѢДѢНІЮ  
ИМПЕРАТОРА ПЕТРА ВЪДНОВАГО

22/0

54462

186.



ALPHABET

2

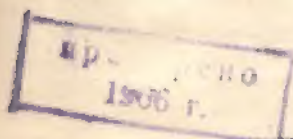
531  
M-56  
Издание Кассы Взаимопомощи Студентовъ Петроградскаго Политехническаго Института

Императора Петра Великаго.

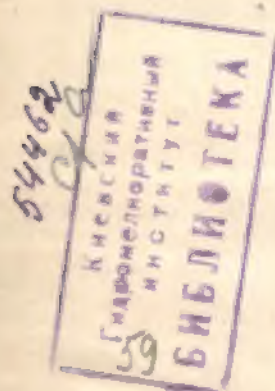


**КУРСЪ**

# ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ



проф. И. В. МЕЩЕРСКАГО.



**ЧАСТЬ ВТОРАЯ**

✓

0  
Петроградъ.

Типо-Литографія И. Трофимова, Можайская ул., д. № 3.

1915.

1847

RECEIVED

March 11 1847

1847



## К И Н Е М А Т И К А .

Дополненія къ первой части курса (см. Курсъ Теоретической  
Механики, часть I, изданіе 1914 г. Кинематика, стр. 119-160).





# КИНЕМАТИКА

## ГЛАВА I.

### СКОРОСТЬ ТОЧКИ.

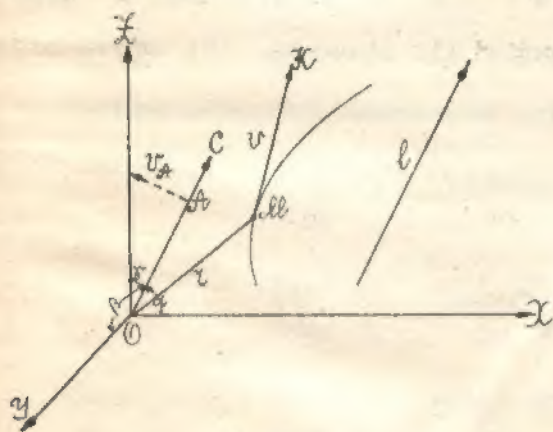
Дополнения \*).

#### § 1.

Введемъ выраженія для проецій скорости точки на какую-либо ось.

При этомъ могутъ представиться два случая: первый, когда ось, на которую мы проектируемъ, сохраняетъ неизмѣнное направ-  
леніе въ пространствѣ; второй, когда направленіе оси измѣня-

ется съ теченіемъ вре-  
мени. Пусть  $ML = v$  бу-  
детъ скорость движу-  
щейся точки  $M$ , (черт.  
1). Проведимъ изъ на-  
чала координатъ прямую  
 $OC$  параллельную дан-  
ной оси  $l$ ; три угла  
 $\alpha, \beta, \gamma$ , которые пря-



Чертеж 1.

мая  $OC$  образуетъ съ осями координатъ, опредѣляютъ направленіе

\*) Курсъ Теоретической Механики, часть I, Кинематика, стр.  
128-137. Изд. 1914 г.

оси проекцій  $l$ .

Проекція скорости  $v$  на ось  $l$  равна:

$$v \cdot \cos(v, l) = \frac{dx}{dt} \cdot \cos \alpha + \frac{dy}{dt} \cdot \cos \beta + \frac{dz}{dt} \cdot \cos \gamma.$$

Преобразование этой формулы производится въ каждомъ изъ двухъ вышеуказанныхъ случаевъ отдѣльно.

*Первый случай.* Когда ось  $l$  не измѣняетъ своего направленія въ пространствѣ, углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  постоянны, поэтому косинусы ихъ можемъ ввести подъ знакъ производной, получаемъ:

$$v \cdot \cos(v, l) = \frac{d(x \cos \alpha)}{dt} + \frac{d(y \cos \beta)}{dt} + \frac{d(z \cos \gamma)}{dt} = \frac{d(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)}{dt} = \frac{d[z \cos(l)]}{dt}$$

гдѣ  $z$  радіусъ-векторъ точки  $M$ .

$$v \cdot \cos(v, l) = \frac{d[z \cdot \cos(z, l)]}{dt} \dots \dots \dots (1)$$

*Второй случай.* Когда направленіе оси  $l$  съ теченіемъ времени измѣняется, углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , а, слѣдовательно, и косинусы ихъ будутъ нѣкоторыя функціи отъ времени. Въ этомъ случаѣ можемъ написать:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \cos \alpha = \frac{d(x \cos \alpha)}{dt} - x \frac{d \cos \alpha}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} \cdot \cos \beta = \frac{d(y \cos \beta)}{dt} - y \frac{d \cos \beta}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} \cdot \cos \gamma = \frac{d(z \cos \gamma)}{dt} - z \frac{d \cos \gamma}{dt}.$$

Такимъ образомъ:

$$\begin{aligned} v \cdot \cos(v, l) &= \frac{d(x \cos \alpha)}{dt} + \frac{d(y \cos \beta)}{dt} + \frac{d(z \cos \gamma)}{dt} - \left( x \frac{d \cos \alpha}{dt} + y \frac{d \cos \beta}{dt} + z \frac{d \cos \gamma}{dt} \right) = \\ &= \frac{d[z \cos(z, l)]}{dt} - \left( x \frac{d \cos \alpha}{dt} + y \frac{d \cos \beta}{dt} + z \frac{d \cos \gamma}{dt} \right). \end{aligned}$$

Преобразуемъ второй членъ въ правой части послѣдняго равенства. Отложимъ отъ начала координатъ по линіи  $OC$  длину  $OA$ , равную единицѣ длины; при движеніи оси  $l$  будетъ двигаться и точка  $A$ ; скорость этой точки обозначимъ черезъ  $v_A$ . Такъ какъ радіусъ-векторъ точки  $A$  равенъ единицѣ, то координаты ея будутъ  $\cos\alpha$ ,  $\cos\beta$ ,  $\cos\gamma$ , слѣдовательно, выраженія:

$$\frac{d\cos\alpha}{dt}, \frac{d\cos\beta}{dt}, \frac{d\cos\gamma}{dt},$$

представляютъ проекціи скорости точки  $A$  на координатныя оси, такъ что

$$\frac{d\cos\alpha}{dt} = v_A \cos(v_A, x),$$

$$\frac{d\cos\beta}{dt} = v_A \cos(v_A, y),$$

$$\frac{d\cos\gamma}{dt} = v_A \cos(v_A, z).$$

а тогда

$$x \frac{d\cos\alpha}{dt} + y \frac{d\cos\beta}{dt} + z \frac{d\cos\gamma}{dt} = z \cdot v_A \cos(z, v_A).$$

Такимъ образомъ, проекція скорости на какую-угодно ось ( $l$ ), направленіе которой измѣняется съ теченіемъ времени, равна:

$$v \cos(v, l) = \frac{d[z \cos(z, l)]}{dt} - z \cdot v_A \cos(z, v_A) \dots \dots \dots (2)$$

**Замѣчаніе 1-ое.** Скорость всегда перпендикулярна къ  $OA$ , (а, слѣдовательно, также  $v_A \perp l$ ) потому что точка  $A$  движется, вообще говоря, по поверхности шара, - въ частномъ случаѣ по окружности круга, - съ центромъ въ началѣ координатъ.

**Замѣчаніе 2-ое.** Формула (1) представляетъ частный случай формулы (2): когда ось сохраняетъ неизмѣнное направленіе въ пространствѣ,  $v_A = 0$ , и второй членъ правой части формулы (2)



обращается въ нуль. -

## § 2. Приложение выведенныхъ формулъ.

Въ нѣкоторыхъ вопросахъ о движеніи точки въ плоскости удобно вмѣсто прямолинейныхъ координатъ ввести координаты полярныя.

Найдемъ выраженія проекцій скорости точки  $M$  на радиусъ-векторъ  $OM$  или его продолженіе  $OB$  и на перпендикуляръ  $MC$ , возстановленный къ радиусу-вектору въ ту сторону, въ которую уголъ  $\varphi$  возрастаетъ (черт. 2); получимъ:

$$v \cos(v, OB) = v' \dots \dots \dots (3)$$

$$v \cos(v, MC) = v' \varphi' \dots \dots \dots (4)^*)$$

Если движеніе точки извѣстно въ полярныхъ координатахъ,

т.е., если дано:

$$r = f_1(t),$$

$$\varphi = f_2(t),$$

то находимъ:

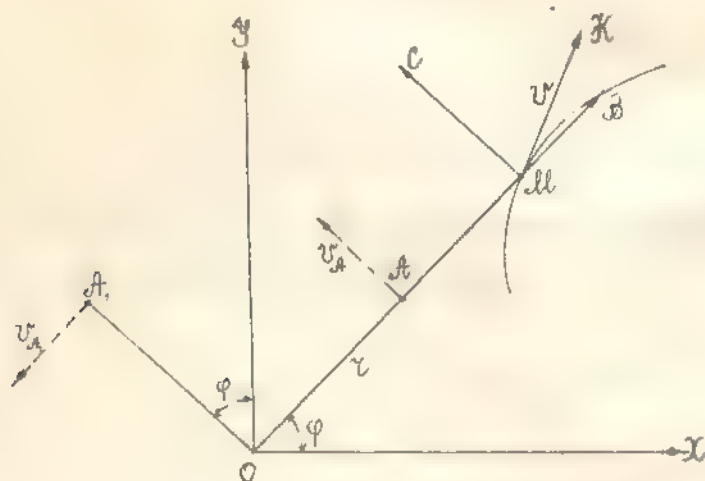
$$v' = f_1'(t),$$

$$\varphi' = f_2'(t),$$

и подставляемъ въ формулы (3) и (4).

Если же движеніе задано въ

прямолинейныхъ координатахъ, то сначала переходимъ къ поляр-



Чертежъ 2.

\*) Какъ и въ первой части, полныя производныя по времени обозначаемъ значками, поставленными наверху справа: первую производную однимъ значкомъ ', вторую производную двумя значками ''.

нимъ, пользуясь известными формулами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

**Выводъ формулы (3).** Такъ какъ радіусъ-векторъ  $Om$ , на который мы проектируемъ, измѣняетъ свое направленіе, то пользуемся формулами (2):

$$v \cos(v, Om) = \frac{d[r \cos(z, Om)]}{dt} = r v_{\mathcal{A}} \cos(z, v_{\mathcal{A}}),$$

гдѣ  $v_{\mathcal{A}}$  есть скорость точки  $\mathcal{A}$ , лежащей на  $Om$  и отстоящей отъ начала координатъ на единицу длины.

$$\cos(z, Om) = 1.$$

Слѣдовательно, первый членъ въ правой части послѣдняго равенства обращается въ

$$\frac{dr}{dt}$$

На основаніи замѣчанія 1-го (§ 1, стр. 7), скорость  $v_{\mathcal{A}} \perp OA$  слѣдовательно:

$$\cos(z, v_{\mathcal{A}}) = 0,$$

а потому второй членъ обращается въ нуль. Такимъ образомъ

$$v \cos(v, Om) = \frac{dr}{dt} = r'.$$

**Выводъ формулы (4).** Изъ начала координатъ проводимъ прямую, параллельную оси  $MC$ , и откладываемъ на этой прямой отъ начала координатъ длину  $OA_1$ , равную единицѣ длины.

Воспользуемся опять формулой (2).

$$v \cos(v, MC) = \frac{d[r \cos(z, MC)]}{dt} = r v_{\mathcal{A}_1} \cos(z, v_{\mathcal{A}_1}),$$

гдѣ  $v_{\mathcal{A}_1}$  есть скорость точки  $\mathcal{A}_1$ .

По условію  $MC \perp z$ , слѣдовательно,

$$\cos(\tau, \mathcal{MC}) = 0 ;$$

а потому первый членъ послѣдняго равенства обрабаается въ нуль. На основаніи замѣчанія 1-го (§ 1, стр. 7), скорость  $v_{\mathcal{A}_1} \perp \mathcal{OA}_1$ , следовательно,  $v_{\mathcal{A}_1} \parallel \tau$ , но направлена въ противоположную сторону; поэтому

$$\cos(\tau, v_{\mathcal{A}_1}) = -1,$$

$$\angle(\mathcal{OA}_1, \mathcal{OY}) = \varphi.$$

Длина дуги, которую описываетъ точка  $\mathcal{A}_1$ , тоже равна  $\varphi$ , такъ какъ радіусъ этой дуги равенъ единицѣ, следовательно, скорость  $v_{\mathcal{A}_1} = \varphi'$ . Такимъ образомъ:

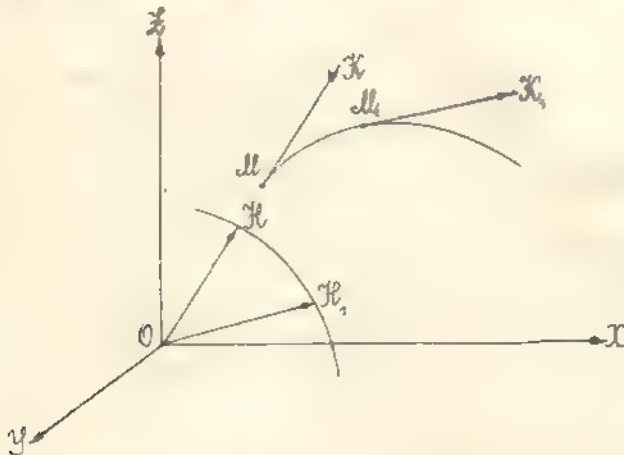
$$v \cos(\tau, \mathcal{MC}) = -v \cdot \varphi'(-1) = v \cdot \varphi'.$$

На основаніи формулъ (3) и (4), величина скорости въ полярныхъ координатахъ выразится формулой:

$$v = \sqrt{v^2 + v^2 \varphi'^2} \dots \dots \dots (5)$$

### § 3. Годографъ скорости.

Точка  $\mathcal{M}$ , описывая траекторію, имѣетъ скорость, которая съ теченіемъ времени измѣняется, вообще говоря, и по величинѣ и



Чертежъ 3.

по направленію. Чтобы имѣть наглядное представленіе объ измѣненіи величины и направленія скорости точки, проводимъ изъ начала координатъ прямыя, равныя и параллельныя скоростямъ движущейся точ-



ки:  $OH \neq MK$ ,  $OH_1 \neq MK_1$ , и т.д. (черт.3).

Линія, представляющая геометрическое мѣсто точекъ  $H, H_1, \dots$  называется *годографомъ скорости точки  $M$* .

Когда движеніе *плоское*, годографъ будетъ кривая *плоская*. Если дано  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ , то уравненіе годографа можно получить слѣдующимъ образомъ: пусть координаты точки  $H$  будутъ  $x_1$  и  $y_1$ :

$$x_1 = OH \cos(OH, OX),$$

$$y_1 = OH \cdot \cos(OH, OY).$$

Но  $OH$  по величинѣ и направленію равна скорости  $MK$ ; слѣдовательно:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{dx}{dt} = f'_1(t), \\ y_1 &= \frac{dy}{dt} = f'_2(t). \end{aligned} \right\} \dots \quad (\alpha)$$

Такимъ образомъ, зная движеніе точки, мы легко составимъ дифференцированіемъ по времени выраженія для переменныхъ координатъ точки годографа. - Исключая  $t$  изъ найденныхъ двухъ уравненій  $(\alpha)$ , получимъ уравненіе годографа

$$F(x_1, y_1) = 0.$$

Если движеніе точки не *плоское*, то и годографъ вообще кривая не *плоская*.

Если дано:  $x = f_1(t)$ ;  $y = f_2(t)$ ;  $z = f_3(t)$ ; и если переменныя координаты точки годографа обозначимъ черезъ  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , то

$$x_1 = \frac{dx}{dt} = f'_1(t),$$

$$y_1 = \frac{dy}{dt} = f'_2(t).$$

$$z_1 = \frac{dz}{dt} = f'_3(t).$$

Исключая  $t$  из этихъ уравненій, получимъ два уравненія годографа:

$$y_1 = F_1(x_1),$$

$$z_1 = F_2(x_1).$$

*Примѣчаніе.* Можно строить годографъ скорости точки, проводя изъ любой неподвижной точки, хотя бы и не лежащей въ началѣ координатъ, прямая, параллельная скоростямъ, но не равныя имъ, а только пропорціональныя.

#### *Простѣйшіе случаи.*

1. Если движеніе прямолинейное и равномерное, годографъ скорости - точка.

2. Если движеніе прямолинейное, но не равномерное, годографъ - прямая, параллельная троекторіи, проходящая чрезъ начало координатъ.

3. Если движеніе плоское, криволинейное и равномерное, годографъ - окружность съ центромъ въ началѣ координатъ.

4. Если движеніе не плоское, но равномерное, годографъ - сферическая кривая, т.е., кривая, начерченная на поверхности шара; центръ шара въ началѣ координатъ

#### *Примѣры:*

1,  $x = a + at, y = b + ct + \frac{g}{2} t^2$ ; годографъ скорости прямая:  $x_1 = a$

2,  $x = a \cos kt, y = b \sin kt$ ; годографъ скорости эллипсъ.

3,  $x = a e^{kt}, y = b e^{-kt}$ ; годографъ скорости гипербола.

## ГЛАВА II.

### У С К О Р Е Н І Е Т О Ч К И .

Дополненія \*).

#### § 1.

Выведемъ соотношение, существующее между ускореніемъ точки  $M$  и скоростью точки  $H$ , вычерчивающей годографъ скорости точки  $M$ .

Пусть  $MK$  и  $M_1K_1$  (черт. 4) будутъ скорости точки  $M$  въ моменты  $t$  и  $t + \Delta t$ , Проводимъ  $ML \neq MK$ , и  $M_1L' \neq K_1L$ . Пусть

$$\frac{ML - M_1L'}{\Delta t} = MP,$$

и пусть ускореніе точки  $M$

$$\dot{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (MP)_{\Delta t \rightarrow 0} = MR.$$

Строимъ годографъ скорости: изъ начала координатъ проводимъ  $OH \neq MK$ ,  $OH_1 \neq M_1K_1$  и т.д. По мѣрѣ того, какъ точка движется по ея траекторіи, точка  $H$  движется по годографу, слѣдовательно, въ каждый моментъ  $t$  имѣемъ некоторую скорость, обозначимъ ее черезъ  $u$ . Раздѣлимъ хорду  $HK_1$  на  $\Delta t$ ; пусть

$$\frac{HK_1}{\Delta t} = HK.$$

Такъ какъ, переходя къ предѣлу, мы можемъ замѣнить хорду соответствующей дугой  $HK$ , то по опредѣленію скорости имѣемъ:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (HK)_{\Delta t \rightarrow 0} = u.$$

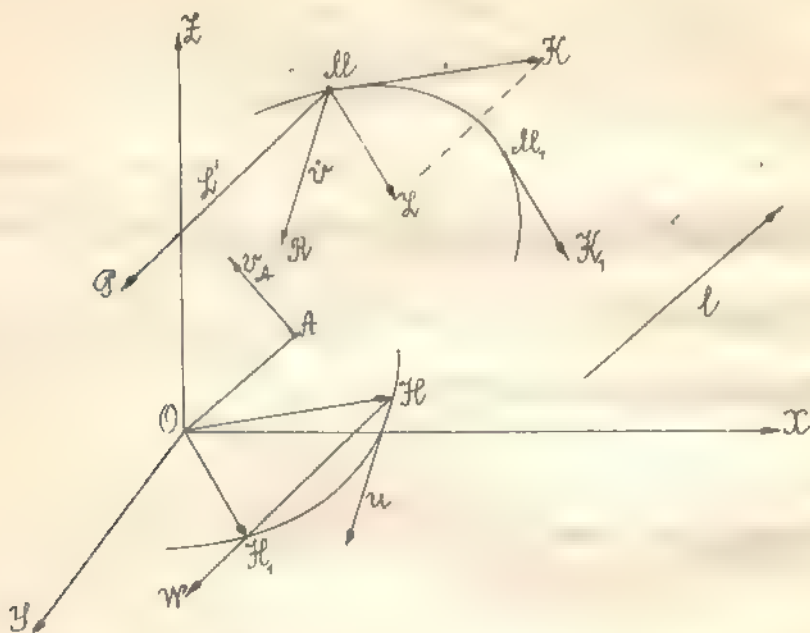
---

\*) Курсъ Теоретической Механики, часть I. Динамика, стр. 137-143. Изд. 1914 г.



Изъ равенства треугольниковъ  $HH_1$  и  $KK_1$  вытекаетъ:  
 $HH_1 \neq KK_1$ , следовательно  $HH_1 \neq LL'$ ; раздѣляя на  $\Delta t$  полу-  
 чаемъ:

$$HW \neq UP.$$



Чертежъ 4.

Переходимъ къ предѣлу, уменьшая  $\Delta t$  до нуля, получимъ:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (HW) \neq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (UP),$$

или

$$u \neq v$$

Мы пришли такимъ образомъ къ слѣдующему заключенію: уско-  
 реніе движущейся точки по численной величинѣ и по направленію  
 рленію скорости точки, вычерчивающей тороидъ въ скорости \*).

Слѣдовате. Проекція ускоренія движущейся точки на какую

\*) Говоримъ, "по численной величинѣ", потому что скорость  
 и ускореніе величины разнородныя.

либо ось равна проекции на ту же ось скорости точки годографа.

## § 2.

Выведем выражения для проекции ускорения точки на какую угодно ось  $l$  постоянного или переменного направления.

На основании приведенного выше следствия из соотношения между ускорением точки и скоростью точки, вычерчивающей годограф, нам достаточно найти выражение проекции скорости  $u$  на ось  $l$ , а для этого воспользуемся формулами (1) и (2) (см. § 1, стр. 6 и 7).

Если ось  $l$  сохраняет постоянное направление в пространстве, то на основании формулы (1) имеем:

$$\dot{u} \cos(\dot{v}, l) = u \cos(u, l) = \frac{d[v \cos(v, l)]}{dt} = \frac{d^2[z \cos(z, l)]}{dt^2},$$

где  $z$  радиус-вектор точки  $M$ .

Когда ось  $l$  изменяет свое направление в пространстве, применяем формулу (2), получаем:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, l) = u \cos(u, l) = \frac{d[v \cos(v, l)]}{dt} - v \cdot v_x \cos(v, v_x),$$

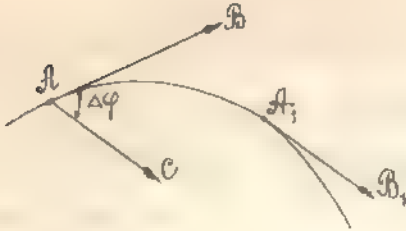
где  $v_x$  есть скорость точки  $A$ , лежащей на  $OA(OA \parallel l)$  и отстоящей от начала координат на единицу длины.

----- " -----

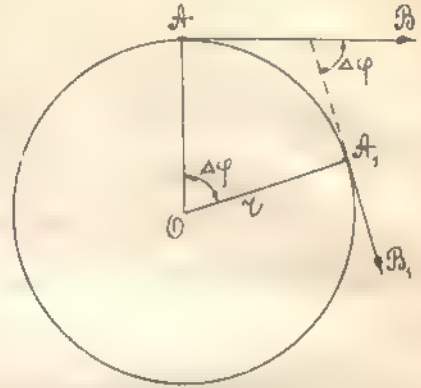
Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые сведения из геометрии.

Угол  $\Delta\varphi$ , образуемый направлениями двух касательных  $AB$  и  $A'B'$  (черт. 5), проведенных к кривой в двух бесконечно

близких точках  $A$  и  $A_1$ ,  $\Delta\varphi = \angle BAC$  ( $AC \parallel A_1B_1$ ) называется **углом смежности** кривой в точке  $A$ .



Чертеж 5.



Чертеж 6.

Обозначим длину бесконечно малой дуги  $AA_1$  через  $\Delta s$ .

Пред.  $\left( \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right)_{\Delta s \rightarrow 0}$  называется **кривизной кривой** в точке  $A$ ; получаем, таким образом, следующее определение: Кривизна кривой в некоторой точке есть предельн., къ которому стремится отношеніе угла смежности къ соотвѣтствующей дугѣ, при уменьшеніи ея до нуля.

Въ частномъ случаѣ, когда кривая есть окружность, кривизна имѣетъ постоянную величину: она равна обратной величинѣ радіуса окружности.

Въ самомъ дѣлѣ, уголъ  $\angle BAA_1$  (черт. 6) равенъ углу смежности  $\Delta\varphi$ , следовательно, длина дуги  $AA_1 = \Delta s = r \Delta\varphi$ ; поэтому кривизна окружности вѣ точкѣ  $A$  равна.

$$\text{пред.} \left( \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right)_{\Delta s \rightarrow 0} = \text{пред.} \left( \frac{\Delta\varphi}{r \Delta\varphi} \right) = \text{пред.} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r}.$$

По аналогіи съ окружностью и въ общемъ случаѣ кривизну всякой кривой выражаетъ въ видѣ  $\frac{1}{\rho}$ , причѣмъ длина  $\rho$ , величина обратная кривизнѣ кривой, называется **радіусомъ кривизны кривой** въ данной точкѣ.



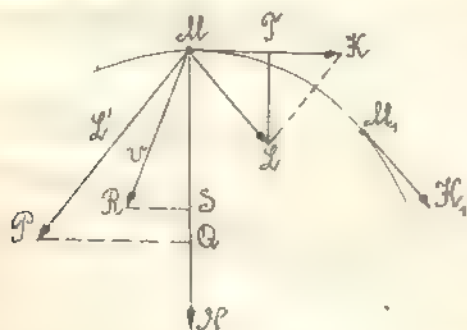
Если кривизну кривой обозначим через  $\kappa$ , то радиус кривизны

$$\rho = \frac{1}{\kappa} \quad *)$$

Через касательную  $AB$  и линию  $AC$  (черт. 5) проведем плоскость  $P$ ; по мере приближения  $A_1$  к  $A$  плоскость  $P$  будет изменять свое положение, и ее предельное положение (при уменьшении  $\Delta S$  до нуля) называется плоскостью кривизны или соприкасающейся плоскостью кривой в точке  $A$ ; - получаем следующее определение: Плоскость кривизны кривой в данной точке есть предельное положение плоскости, проведенной через касательную к кривой в этой точке, параллельно касательной в точке бесконечно близкой.

Когда кривая плоская, то плоскость кривизны совпадает с ее собственной плоскостью.

Нормалью к кривой в данной точке называется перпендикуляр, восстановленный в этой точке к касательной, проведенной из этой же точки.



Чертеж 7.

Очевидно, в данной точке кривой можно провести бесчисленное множество нормалей - все они заключаются в нормальной плоскости. Нормаль, лежащая в плоскости кривизны кривой, называется главной нормалью.

Нетрудно заметить, что

\*) Кривизна прямой равна нулю, и, следовательно, радиус кривизны прямой будет бесконечно большой

ускореніе точки всегда заключается въ плоскости кривизны траекторіи.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть скорость точки въ моментъ  $t$  будетъ  $MK$ , (черт.7), въ моментъ  $t + \Delta t$  —  $M_1K_1$ . Проводимъ

$$ML \neq MK_1, \quad ML' \neq K_1L.$$

Пусть

$$\frac{ML}{\Delta t} = MP$$

и

$$\text{прид } (MP)_{\Delta t} = MR \cdot v.$$

По опредѣленіи, плоскость кривизны въ точкѣ  $M$  есть предѣльное положеніе плоскости  $KLM$ . Прямая  $KL$  и точка  $M$  заключаются въ плоскости  $KLM$ . Переходя къ предѣламъ, получимъ, что  $MR$  будетъ заключаться въ плоскости кривизны.

Такъ какъ для плоской кривой плоскость кривизны совпадаетъ съ ея плоскостью, то въ этомъ случаѣ ускореніе заключается въ плоскости движенія, что очевидно.

----- " -----

### § 3.

Найдемъ выраженія для проекцій ускоренія, во-первыхъ, на касательную къ траекторіи, направленную въ сторону движенія точки (другими словами — на направленіе скорости), во-вторыхъ, на главную нормаль траекторіи, направленную въ сторону ея вогнутости.

Пусть  $MX$  будетъ главная нормаль къ траекторіи въ точкѣ  $M$  (черт.7). Намъ предстоитъ найти выраженія для проекцій ускоренія  $MR$  на оси  $MK$  и  $MX$  \*).

-----  
\*) Проекція ускоренія на третью ось, перпендикулярную къ  $MK$  и  $MX$  равна нулю, потому что эта ось перпендикулярна къ

Чтобы найти проекцію ускоренія на *направление скорости*, можем воспользоваться формулой (2), подставляя  $MK$  вместо  $l$

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, MK) = \frac{d[v \cos(v, MK)]}{dt} = v \dot{v}_\perp \cos(v, v_\perp)$$

Имѣемъ:

$$\cos(v, MK) = 1, \quad \cos(v, v_\perp) = 0,$$

такъ какъ  $v_\perp \perp v$  на основаніи замѣчанія 1-го; получаемъ:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, MK) = \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (3)$$

Проекція ускоренія на *направление касательной къ траекторіи* называется *касательнымъ* (или *тангенціальнымъ*) *ускореніемъ* и обозначается черезъ

$$\dot{v}_t = \frac{dv}{dt} \dots \dots \dots (3)$$

Выраженіе проекціи ускоренія на *направление главной нормали къ траекторіи* равно:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, MN) = MP \cos \angle PMN = MS.$$

Мы получимъ длину  $MS$ , если найдемъ выраженіе проекціи

$$MP \cos \angle PMN = MQ$$

и перейдемъ къ предѣлу.

Изъ точки  $L$  опускаемъ перпендикуляръ  $LT$  на  $MK$ . Изъ подобія треугольниковъ  $MPQ$  и  $KLT$  слѣдуетъ:

$$\frac{MQ}{MP} = \frac{LT}{KL},$$

откуда

$$MQ = \frac{MP \cdot LT}{KL}.$$

Такъ какъ

-----

$$\dot{M\varphi} = \frac{M\dot{\varphi}}{\Delta t} = \frac{K\dot{\varphi}}{\Delta t},$$

то

$$M\dot{\varphi} = \frac{K\dot{\varphi}}{\Delta t};$$

слѣдовательно:

$$M\dot{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (M\dot{\varphi})_{\Delta t \rightarrow 0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{K\dot{\varphi}}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}.$$

Уголъ  $K\dot{\varphi}$  есть уголъ смежности; обозначимъ его черезъ  $\Delta\varphi$ , тогда

$$K\dot{\varphi} = M\dot{\varphi} \cdot \sin \Delta\varphi,$$

и мы получимъ:

$$M\dot{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( M\dot{\varphi} \cdot \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0}.$$

Представимъ правую часть равенства въ слѣдующемъ видѣ:

$$M\dot{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ M\dot{\varphi} \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right\}_{\Delta t \rightarrow 0};$$

будемъ уменьшать  $\Delta t$  до нуля и посмотримъ, къ чему будетъ стремиться каждый изъ этихъ четырехъ множителей.

$M\dot{\varphi}$  стремится совпасть съ  $M\dot{K}$ ; слѣдовательно:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (M\dot{\varphi})_{\Delta t \rightarrow 0} = M\dot{K} = v;$$

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \right)_{\Delta\varphi \rightarrow 0} = 1;$$

Пределъ  $\left( \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right)$  есть кривизна траекторіи, слѣдовательно, если радиусъ кривизны обозначимъ черезъ  $\varrho$ , то

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right)_{\Delta s \rightarrow 0} = \frac{1}{\varrho},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)_{\Delta t \rightarrow 0} = v.$$

Такимъ образомъ:



$$MS = v + \frac{1}{\rho} v = \frac{v^2}{\rho}$$

слідовательно, проекція ускоренія на направлєніє главной нормали къ траекторіи равна:

$$\dot{v} \cos(\dot{v}, MS) = \frac{v^2}{\rho} \dots \dots \dots (4)$$

Эта проекція ускоренія називается *нормальнымъ ускореніемъ* точки и обозначается через  $\dot{v}_n$  :

$$\dot{v}_n = \frac{v^2}{\rho} .$$

Такъ какъ проекція ускоренія на третью ось (перпендикулярную къ плоскости  $KMN$ ), какъ замѣчено выше, равна нулю, то на основаніи формулъ (3) и (4) имѣемъ:

$$\dot{v} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} .$$

Слѣдствіе изъ формулъ:

$$\dot{v}_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{и} \quad \dot{v}_n = \frac{v^2}{\rho} .$$

1) Если движеніе точки по какой-угодно кривой будетъ равномерное, т.е. совершается съ постоянной скоростью, то

$$\dot{v}_t = 0 \quad \text{и} \quad \dot{v}_n = \frac{v^2}{\rho} .$$

Эти двѣ формулы показываютъ, что ускореніе направлено по главной нормали въ сторону вогнутости траекторіи и по величинѣ равно  $\frac{v^2}{\rho}$  , т.е. оно пропорціонально кривизнѣ траекторіи.

2) Если движеніе происходитъ по окружности радіуса  $R$  , то  $\rho = R$  и скорость точки

$$v = R |\varphi'| = R \omega ,$$

гдѣ  $|\dot{\varphi}| = \omega$  есть угловая скорость.

Въ этомъ случаѣ

$$v_t = R \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = R \frac{d\omega}{dt} = R \dot{\omega},$$

гдѣ  $\dot{\omega}$  — угловое ускореніе и

$$v_n = \frac{R^2 \varphi''}{R} = R \varphi'' = R \omega^2.$$

Въ частномъ случаѣ, если точка движется по окружности равномерно,

$$\omega = \text{const.}$$

$$v_t = 0,$$

$$v_n = R \omega^2.$$

----- " -----

### Г Л А В А III.

#### ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ.

##### § 1.

Относительное движеніе точки по отношенію къ нѣкоторому движущемуся твердому тѣлу есть послѣдовательный переходъ разсматриваемой точки черезъ точки этого тѣла.

Если строго держаться этого опредѣленія, то пришлось бы разсматривать относительное движеніе только такой точки которая находится внутри движущагося тѣла или на его поверхности. Чтобы распространить опредѣленіе относительнаго движенія и на тотъ случай, когда точка находится внѣ тѣла, мы должны

каждый разъ представляетъ себѣ, что тѣло какъ бы вырастаетъ и включаетъ въ себя разсматриваемую точку. Такое пронизваемое твердое тѣло неограниченныхъ размѣровъ называемъ "неизмѣняе-мой средой".

Абсолютное движеніе точки есть послѣдовательный переходъ ея черезъ точки пространства; слѣдовательно, относительное движеніе обращается въ абсолютное тогда, когда движущаяся "неизмѣняемая среда" приводится въ состояніе покоя.

Все то, что мы говорили о траекторіи, скорости и ускореніи абсолютнаго движенія точки, применимо и къ относительному движенію; разница только въ томъ, что въ случаѣ относительнаго движенія точки мы должны брать координатныя оси не неподвижныя, а проведенныя черезъ точки тѣла (или неизмѣнно съ нимъ связанныя) и, слѣдовательно, движущіяся вмѣстѣ съ тѣломъ. Когда точка совершаетъ свое относительное движеніе, она вмѣстѣ съ тѣломъ переносится въ пространствѣ; это второе движеніе точки называется "переноснымъ движеніемъ".

Скоростью переноснаго движенія въ данный моментъ называется та скорость, которую точка имѣла бы въ этотъ моментъ, если бы она была прикрѣплена къ тѣлу; другими словами, - скорость той точки тѣла, съ которой разсматриваемая движущаяся точка въ данный моментъ совпадаетъ.

*Теорема. Скорость абсолютнаго движенія точки по величинѣ и направленію равна геометрической суммѣ скоростей относительнаго и переноснаго движеній разсматриваемой точки.*

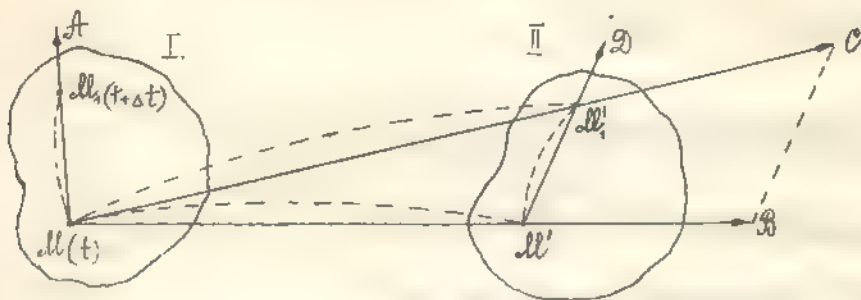
Обозначимъ:  $V$  - скорость абсолютнаго движенія точки,  $U$  - скорость относительнаго движенія, а  $V'$  - скорость переноснаго движенія. Докажемъ, что \*).

---

\*) Условимся въ случаѣ геометрическаго сложения ставить каждыя слагаемыми и суммой горизонтальныя черты.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{u}.$$

Пусть въ нѣкоторый моментъ  $t$  тѣло занимаетъ положеніе I (черт. 8). Въ этомъ тѣлѣ или на его поверхности движется точка  $M$ . Пусть  $M$  и  $M_1$  будутъ положенія этой точки въ тѣлѣ въ моменты  $t$  и  $t + \Delta t$ ; кривая  $M M_1$  - относительная траекторія точки.



Чертежъ 8.

За промежутокъ времени  $\Delta t$  тѣло само перемѣстится и займетъ положеніе II, а потому и относительная траекторія  $M M_1$  займетъ новое положеніе  $M' M'_1$ . Кривая (пунктирная)  $M M' M'_1$  есть путь, который точка совершила бы въ промежутокъ  $\Delta t$ , если бы она была неизмѣнно связана съ тѣломъ. Кривая (пунктирная)  $M M'_1$  есть траекторія точки въ ея абсолютномъ движеніи. Дѣлимъ каждую изъ хордъ  $M M_1$ ,  $M M'$  и  $M M'_1$  на  $\Delta t$ , пусть

$$\frac{M M_1}{\Delta t} = M A, \quad \frac{M M'}{\Delta t} = M B, \quad \frac{M M'_1}{\Delta t} = M C.$$

$$\text{прес.}[M A]_{\Delta t=0} = u, \quad \text{прес.}[M B]_{\Delta t=0} = v_1, \quad \text{прес.}[M C]_{\Delta t=0} = v.$$

Соединимъ прямою точки  $B$  и  $C$  и проведемъ хорду  $M' M'_1$ . Изъ подобія треугольниковъ  $M' M M'_1$  и  $B M C$  слѣдуетъ:

$$\frac{BC}{M M'_1} = \frac{MB}{M M'} = \frac{1}{\Delta t};$$

откуда:



$$BC = \frac{u'u'}{\Delta t}.$$

Пусть

$$\frac{u'u'}{\Delta t} = M'Q.$$

Тогда

$$BC = u'Q,$$

а такъ какъ  $BC \parallel M'M$ , то  $BC \neq u'Q$ .

Изъ  $\Delta$ -ка  $BMC$  видимъ, что  $MC$  есть геометрическая сумма двухъ прямыхъ  $MB$  и  $BC$  и, слѣдовательно, также

$$\overline{MC} = \overline{MB} + \overline{u'Q}.$$

Перейдемъ къ предѣлу, уменьшая  $\Delta t$  до нуля:

$$\text{прѣд} [\overline{MC}]_{\Delta t=0} = \text{прѣд} [\overline{MB}]_{\Delta t=0} + \text{прѣд} [\overline{u'Q}]_{\Delta t=0}$$

или

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \text{прѣд} [\overline{u'Q}]_{\Delta t=0}$$

При приближеніи  $\Delta t$  къ нулю,  $M'Q$  стремится къ совпаденію съ  $MA$ , а потому:

$$\text{прѣд} [\overline{u'Q}]_{\Delta t=0} = \text{прѣд} [\overline{MA}]_{\Delta t=0} = u.$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + u.$$

**Слѣдствіе 1-ое.** Если извѣстна относительная скорость точки  $u$  и переносная ея скорость  $v_1$ , то абсолютная скорость точки  $v$  выразится по величинѣ и направленію діагонали параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ  $u$  и  $v_1$  (черт.9).

Скорость  $v$  можно представить, какъ сторону треугольника, замыкающую двѣ другія стороны  $u$  и  $v_1$ .

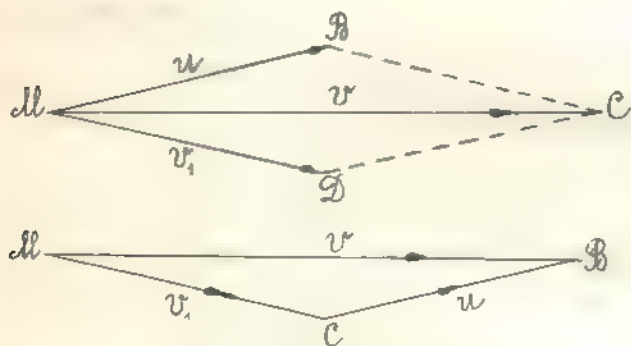
**Слѣдствіе 2-ое:** Если извѣстна абсолютная скорость  $v$  и пе-

реносная  $v_1$ , то относительную скорость  $u$  найдемъ геометрическимъ вычитаніемъ:

$$\bar{u} = \bar{v} - \bar{v}_1.$$

Абсолютное движеніе точки слгается, какъ мы видѣли, изъ двухъ движеній относительнаго и переноснаго; поэтому абсолютное движеніе называется также движеніемъ составнымъ изъ двухъ составляющихъ движеній относительнаго и переноснаго.

При такой терминологіи доказанному теорему можно выразить слѣдующимъ образомъ: скорость точки въ движеніи составномъ изъ двухъ составляющихъ движеній равна геометри-



Чертежъ 2.

ческой суммъ ея скоростей въ составляющихъ движеніяхъ.

Слѣдствіе 2-ое можно формулировать такъ: скорость точки въ одномъ изъ двухъ составляющихъ движеній равна геометрической разности скоростей точки въ составномъ и въ другомъ составляющемъ движеніи.

Понятіе о составномъ движеніи можно распространить на случай сколькихъ угодно составляющихъ движеній, вводя слѣдующее опредѣленіе: движеніе точки будетъ составнымъ изъ  $n$  составляющихъ движеній тогда, когда скорость точки въ этомъ движеніи въ каждый моментъ равна по величинѣ и направленію геометрической суммъ  $n$ хъ скоростей, которыя точка имѣла бы, совершая каждое изъ  $n$  составляющихъ движеній отдѣльно.

Если скорость составнаго движенія точки обозначимъ черезъ  $v$ , а скорость ея составляющихъ движеній черезъ  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ , то на основаніи вынесказаннаго опредѣленія имѣемъ слѣдующее

равенство:

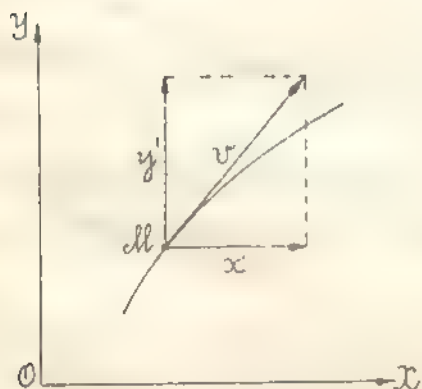
$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \dots + \vec{v}_n.$$

**Примѣръ.** Всякое движеніе точки можно разсматривать, какъ составное изъ трехъ прямолинейныхъ движеній, направленныхъ параллельно координатнымъ осямъ.

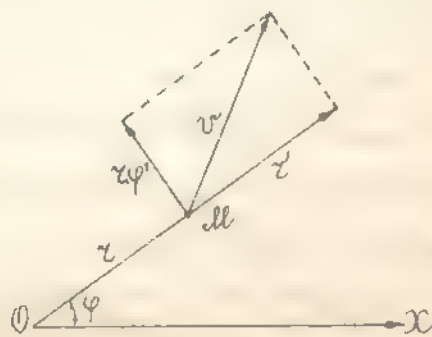
Въ самомъ дѣлѣ, скорость  $\vec{v}$  точки, какъ извѣстно, равна по величинѣ и направленію діагонали параллелепипеда, ребра котораго параллельны координатнымъ осямъ и соответственно равны первымъ производнымъ отъ координатъ по времени:  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ; слѣдовательно, скорость  $\vec{v}$  есть геометрическая сумма трехъ скоростей:  $x'$ , параллельной оси  $Ox$ ,  $y'$  - параллельной оси  $Oy$  и  $z'$  - параллельной оси  $Oz$ ; такимъ образомъ, составляющія движенія точки, параллельныя координатнымъ осямъ, будутъ такіе же, какъ движенія ея проекцій на эти оси.

Въ частномъ случаѣ, когда точка движется въ плоскости, ея движеніе можно разсматривать, какъ составное изъ двухъ прямолинейныхъ движеній, соответственно параллельныхъ осямъ  $Ox$  и  $Oy$ ; скорость перваго движенія равна  $x'$ , скорость втораго  $y'$  (черт.10).

Наглядно это можно представить себѣ такимъ образомъ: точка движется со скоростью  $x'$  по линейкѣ, расположенной парал-



Чертежъ 10.



Чертежъ 10<sub>1</sub>.

дельно оси  $OX$ , и въ то же время сама линейка движется по оси  $OY$  со скоростью  $y'$ .

Плоское движеніе точки можно разложить на два движенія и другими способами, напримѣръ, такъ, что скорость одного составляющаго движенія будетъ направлена по радіусу-вектору и равна  $v'$ , а скорость другого по перпендикуляру къ радіусу-вектору и равна  $v\varphi'$  (черт. 10<sub>1</sub>).

Это разложеніе можемъ представить себѣ такимъ образомъ: точка движется по радіусу-вектору со скоростью  $v'$ , а въ то же время радіусъ-векторъ вращается вокругъ точки  $O$  съ угловою скоростью  $\varphi'$ .

## § 2.

При разсмотрѣніи относительнаго движенія точки представляются двѣ главныхъ задачи:

1. Даны: движеніе тѣла и относительное движеніе точки; опредѣлить абсолютное движеніе точки.

2. Даны: движеніе тѣла и абсолютное движеніе точки; опредѣлить относительное движеніе точки по отношенію къ тѣлу.

При рѣшеніи этихъ задачъ мы пользуемся двумя системами координатныхъ осей: одну систему беремъ неподвижную въ пространствѣ, другую - движущуюся вмѣстѣ съ тѣломъ; координаты точки въ первой системѣ  $x, y, z$  называются абсолютными, а координаты ея во второй системѣ  $\xi, \eta, \zeta$  \*) называются относительными; видъ уравненій, связывающихъ абсолютныя координаты точки съ ея относительными координатами, зависитъ отъ даннаго движенія тѣла.

Разсмотримъ вышеуказанныя задачи въ двухъ случаяхъ:

1. Когда тѣло движется поступательно; 2, когда тѣло вра-

---

\*) Греческія буквы:  $\xi$  (кси),  $\eta$  (эта),  $\zeta$  (дзета).



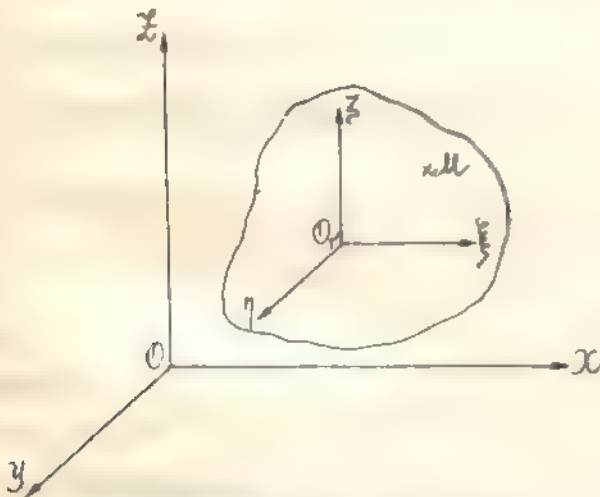
щается вокруг неподвижной оси.

Первый случай тело движется поступательно.

Задача I. Даны: движение тела и относительное движение точки; определить абсолютное движение точки.

Возьмем неподвижные координатные оси:  $OX, OY, OZ$  (черт. 11). Пусть  $O_1(x_0, y_0, z_0)$  будет начало относительной координатной системы, оси которой  $O_1\xi, O_1\eta, O_1\zeta$ , возьмем соответственно параллельными осям  $OX, OY, OZ$ ; такъ какъ тело движется поступательно, то во все время его движения эта

параллельность будет сохраняться:  $O_1\xi \parallel OX, O_1\eta \parallel OY, O_1\zeta \parallel OZ$ . Если точки тела движутся, какъ одна изъ нихъ, на примѣръ,  $O_1$ , а потому движение тела задается уравненіями:



Чертежъ 11.

$$\begin{aligned} x_0 &= f_1(t), \\ y_0 &= f_2(t), \\ z_0 &= f_3(t). \end{aligned}$$

Данное относительное движение точки  $M(\xi, \eta, \zeta)$  — относительныя координаты точки  $M$ :  $x, y, z$  абсолютныя ея координаты) выражается уравненіями:

$$\xi = \varphi_1(t), \quad \eta = \varphi_2(t), \quad \zeta = \varphi_3(t).$$

Уравненія, связывающія абсолютныя и относительныя координаты будутъ слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta \\ z &= z_0 + \zeta \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (1)$$

Подставляя въ эти равенства вместо  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  и  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  ихъ выраженія въ функціяхъ времени, получаемъ уравненія абсолютнаго движенія точки:

$$\begin{aligned}x &= f_1(t) + \varphi_1(t), \\y &= f_2(t) + \varphi_2(t), \\z &= f_3(t) + \varphi_3(t).\end{aligned}$$

Если исключить изъ этихъ трехъ уравненій время, получимъ уравненія абсолютной траекторіи точки:

$$\begin{aligned}y &= F_1(x), \\z &= F_2(x).\end{aligned}$$

Скорости точки въ абсолютномъ движеніи получимъ, найдя проекціи скорости на координатныя оси:

$$\left. \begin{aligned}x' &= x'_0 + \xi', \\y' &= y'_0 + \eta', \\z' &= z'_0 + \zeta'.\end{aligned} \right\} \quad (2)$$

*Примечаніе.* Уравненія (2) выражаютъ ту связь между скоростями абсолютнаго и относительнаго движенія, которую мы раньше доказали для общаго случая:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}.$$

Ускореніе точки въ абсолютномъ движеніи получимъ, найдя проекціи ускоренія на координатныя оси.

$$\left. \begin{aligned}x'' &= x''_0 + \xi'', \\y'' &= y''_0 + \eta'', \\z'' &= z''_0 + \zeta''.\end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

Уравненія (3) выражаютъ, что при *последовательномъ* движеніи тѣла ускореніе абсолютнаго движенія ( $\dot{v}$ ) равно геометри-

ческой суммѣ ускореній относительнаго ( $\ddot{u}$ ) и переноснаго ( $\ddot{v}_1$ ) движеній:

$$\ddot{v} = \ddot{v}_1 + \ddot{u}.$$

**Задача II.** Даны: поступательное движеніе тѣла и абсолютное движеніе точки; опредѣлить относительное движеніе точки по отношенію къ тѣлу.

Дано:

$$x = F_1(t), \quad y = F_2(t), \quad z = F_3(t);$$

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t), \quad z_0 = f_3(t);$$

требуется опредѣлить  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , какъ функція времени  $t$ . Изъ уравненія (1) имѣемъ:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x - x_0 \\ \eta &= y - y_0 \\ \zeta &= z - z_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

Подставляя въ уравненія (4) вмѣсто  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  ихъ выраженія въ функціяхъ времени, получаемъ уравненія относительнаго движенія точки:

$$\xi = F_1(t) - f_1(t),$$

$$\eta = F_2(t) - f_2(t),$$

$$\zeta = F_3(t) - f_3(t).$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій время  $t$ , найдемъ уравненія относительной траекторіи точки:

$$\eta = F_1(\xi),$$

$$\zeta = F_2(\xi).$$

Скорость и ускореніе относительнаго движенія получимъ, най-

для проекцій ихъ на координатныя оси:

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= x' - x_0' \\ \eta' &= y' - y_0' \\ \zeta' &= z' - z_0' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \xi'' &= x'' - x_0'' \\ \eta'' &= y'' - y_0'' \\ \zeta'' &= z'' - z_0'' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

*Прильрь.* Карандашъ, совершающій колебательное движеніе:

$$\begin{aligned} x &= a \cdot \sin kt, \\ y &= 0 \end{aligned}$$

и листъ бумаги, совершающій колебательное движеніе въ перпендикулярномъ направленіи:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= b \cdot \cos kt. \end{aligned}$$

Начерченная кривая будетъ относительная траекторія карандаша:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1.$$

*Второй случай:* тѣло вращается около оси.

*Задача I.* Даны: движеніе тѣла, вращающагося около неподвижной оси, и относительное движеніе точки по отношенію къ этому тѣлу; опредѣлить абсолютное движеніе точки.

Извѣстны, какъ функціи времени: уголъ поворота тѣла  $\varphi = F(t)$  и относительныя координаты точки:

$$\xi = f_1(t), \quad \eta = f_2(t), \quad \zeta = f_3(t);$$

требуется опредѣлить ея абсолютныя координаты:  $x, y, z$  какъ



функція времени.

Неподвижну ось, вокругъ которой вращается тѣло, принимаемъ за ось  $O\xi$  (черт.12); ее же возьмемъ за ось  $Oz$ , а за ось  $Ox$  беремъ прямую, образующую съ осью  $Ox$  уголъ  $\varphi$ .



Уравненія, связывающія абсолютныя координаты съ относительными, будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ y &= \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi, \\ z &= \zeta \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Чертежъ 12.

Подставляя въ уравненія (1) вмѣсто  $\xi, \eta$  и  $\zeta$  данныя выраженія ихъ въ функціяхъ времени, получимъ уравненія абсолютнаго движенія точки. Исклѣчивъ же изъ этихъ уравненій время, найдемъ уравненія абсолютной траекторіи точки.

Примѣръ. Шарикъ равномерно движется по прямой трубкѣ, которая равномерно вращается, оставаясь въ одной плоскости:

$$\varphi = nt, \quad \xi = at, \quad \eta = 0.$$

Абсолютная траекторія шарика - Архимедова спираль.

Скорость абсолютнаго движенія получимъ, найдя ея проекціи на оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ :

$$\left. \begin{aligned} x' &= (\xi' \cos \varphi - \eta' \sin \varphi) - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi', \\ y' &= (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) + (\xi' \cos \varphi - \eta' \sin \varphi) \varphi', \\ z' &= \zeta' \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Первый членъ въ выраженіи  $x'$ , аналогичный выраженію  $x$  въ уравненіи (1), представляетъ проекцію на ось  $Ox$  относи-

тельной скорости точки:

$$\xi' \cos \varphi - \eta' \sin \varphi = u \cos(u, X).$$

Второй членъ въ выраженіи  $x'$  представляетъ проекцію переносной скорости на ось  $OX$  :

$$-(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi' = -y \cdot \varphi' = v_1 \cos(v_1, X). \quad *)$$

Слѣдовательно:

$$x' = v \cos(v, X) = u \cos(u, X) + v_1 \cos(v_1, X).$$

Также найдемъ:

$$y' = v \cos(v, Y) = u \cos(u, Y) + v_1 \cos(v_1, Y),$$

и

$$z' = v \cos(v, Z) = u \cos(u, Z).$$

Эти формулы выражаютъ уже извѣстную намъ связь между скоростями:

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{v}_1$$

Ускореніе абсолютнаго движенія получимъ, найдя его проекціи на оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  :

$$\begin{aligned} x'' &= (\xi'' \cos \varphi - \eta'' \sin \varphi) - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi'' - (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi'^2 - 2(\xi' \sin \varphi + \eta' \cos \varphi) \varphi', \\ y'' &= (\xi'' \sin \varphi + \eta'' \cos \varphi) + (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi'' - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi'^2 + 2(\xi' \cos \varphi - \eta' \sin \varphi) \varphi', \\ z'' &= \xi''. \end{aligned}$$

Первые члены въ этихъ формулахъ представляютъ проекціи относительнаго ускоренія на координатныя оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$  :

$$\begin{aligned} \xi'' \cos \varphi - \eta'' \sin \varphi &= \ddot{u} \cos(u, X), \\ \xi'' \sin \varphi + \eta'' \cos \varphi &= \ddot{u} \cos(u, Y), \\ \xi'' &= \ddot{u} \cos(u, Z). \end{aligned}$$

Вторые члены въ выраженіяхъ  $x''$  и  $y''$  представляютъ проекціи на оси  $OX$  и  $OY$  вращательнаго ускоренія точки: \*\*)

\*) См.: "ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I.

\*\*) См.: "ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА", часть I.

$$\begin{aligned} -(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi' &= -y \varphi', \\ (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi' &= x \varphi'. \end{aligned}$$

Третьи члены суть проекции на оси  $OX$  и  $OY$  центростремительного ускорения точки:

$$\begin{aligned} -(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi'^2 &= -x \varphi'^2, \\ -(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi'^2 &= -y \varphi'^2. \end{aligned}$$

Проекция на ось  $OZ$  какъ вращательнаго, такъ и центростремительнаго ускорения равна нулю. Такъ какъ проекции на оси  $OX$  и  $OY$  ускорения  $\dot{v}_1$  точки тѣла \*) во вращательномъ движеніи соответственно равны алгебраической суммѣ проекцій на эти оси вращательнаго и центростремительнаго ускорения, то

$$\begin{aligned} -(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi' - (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi'^2 &= \dot{v}_1 \cos(k' X), \\ (\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi' - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi'^2 &= \dot{v}_1 \cos(k' Y). \end{aligned}$$

Остаются члены:

$$-2(\xi' \sin \varphi + \eta' \cos \varphi) \cdot \varphi',$$

и

$$2(\xi' \cos \varphi - \eta' \sin \varphi) \varphi';$$

эти члены представляютъ проекции на оси  $OX$  и  $OY$  ускорения, которое называется *добавочнымъ* или *Кориолисовымъ* ускореніемъ; обозначимъ его черезъ  $k'$ ; тогда будетъ:

$$\left. \begin{aligned} k' \cos(k' X) &= -2(\xi' \sin \varphi + \eta' \cos \varphi) \varphi', \\ k' \cos(k' Y) &= 2(\xi' \cos \varphi - \eta' \sin \varphi) \varphi', \\ k' \cos(k' Z) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

Сравнивая форм. (4) съ выраженіями проекцій вращательной скорости см. вторые члены въ уравн. (2), мы видимъ, что онѣ от-

\*) Ускореніе  $\dot{v}_1$  есть сумма съ тѣмъ ускореніе переноснаго движенія для разсматриваемой точки тѣла, или, короче переноснаго ускоренія этой точки.

личаются отъ послѣднихъ, кромѣ множителя 2, только тѣмъ, что вмѣсто проекцій радіуса-вектора точки  $(\xi \text{ и } \eta)$  здѣсь входятъ проекціи относительной скорости  $(\xi' \text{ и } \eta')$ ; отсюда заключаемъ:

Добавочное ускореніе по величинѣ и направленію равно удвоенной вращательной скорости той точки жѣла, радіусъ-векторъ которой, проведенный изъ начала координатъ, по величинѣ и направленію равенъ относительной скорости движущейся точки.

На чертѣхъ 13,  $MA$  — и относительная скорость точки  $M$   $OB \neq MA, BC \perp OX$ ; вращательная скорость точки  $B$  равна:

$$BD = BC \cdot \varphi' = CB \sin \angle BC \varphi' = u \cdot \varphi' \sin(u, OX);$$

прямая  $ME$ , параллельная  $BD$  и равная  $2BD$ , изображаетъ до-

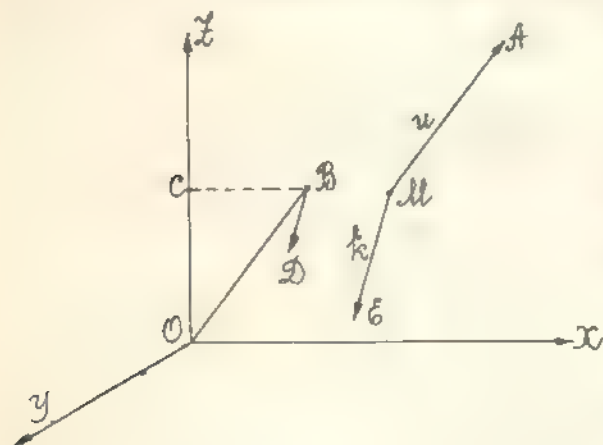
бавочное ускореніе  $k'$  точки  $M$ .

$$k' = 2u \cdot \varphi' \cdot \sin(u, OX).$$

Изъ уравн. (3) и (4) слѣдуетъ формула:

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_1 + \vec{k} \dots \dots (5)$$

выражающая теорему Коріолиса для рассматриваемаго случая:



Черт. 13.

Абсолютное ускореніе точки  $(\vec{v})$  равно геометрической суммѣ трехъ ея ускореній; относительнаго ускоренія  $(\vec{u})$ , переноснаго  $(\vec{v}_1)$  и добавочнаго  $(\vec{k})$ .

Примръ: Въ задачѣ, гдѣ шарикъ равномерно движется  $(\xi = at, \eta = 0)$  по прямой трубкѣ, равномерно вращающейся  $(\varphi = nt)$  въ плоскости  $XOY$  \*) (черт. 14), относительное ускореніе  $\vec{u} = 0$ ; переносное ускореніе состоитъ изъ одного центростремительнаго

\*) Предполагаемъ, что  $a > 0$  и  $n > 0$



$(\omega \cdot \varphi^2)$ , такъ какъ вращательное ускореніе  $(\omega \varphi')$  равно нулю;

поэтому:

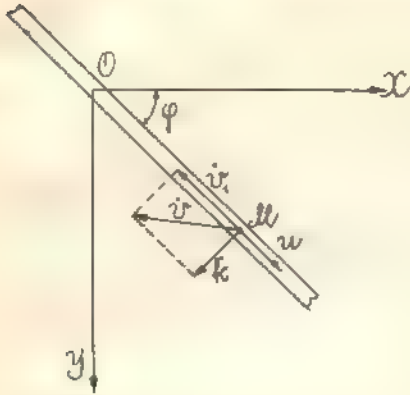
$$\dot{v}_r = \omega^2 \cdot a \cdot t$$

и направлено по трубкѣ къ центру вращенія; добавочное ускореніе

$$\dot{k} = 2 \cdot \omega \cdot \varphi' = 2a \cdot \omega$$

и направленно по перпендикуляру трубкѣ; абсолютное ускореніе

$$\dot{v} = a \cdot \omega \cdot \sqrt{\omega^2 t^2 + 4}.$$



Чертежъ 14.

**Примѣчаніе 1-ое.** Въ частномъ случаѣ, когда относительная скорость точки ( $u$ ) будетъ параллельна оси вращенія  $OZ$ , добавочное ускореніе ( $\dot{k}$ ) равно нулю.

**Примѣчаніе 2-ое.** Ускореніе, равное и противоположное добавочному, называется поворотнымъ ускореніемъ.

**Задача II.** Даны: движеніе тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, и абсолютное движеніе точки; опредѣлить относительное движеніе точки по отношенію къ данному тѣлу.

Дано:  $\varphi = F(t)$  и  $x = F_1(t)$ ,  $y = F_2(t)$ ,  $z = F_3(t)$ ; требуется опредѣлить  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , какъ функціи времени.

Выражаемъ относительныя координаты черезъ абсолютныя:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\ \eta &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ z &= \zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Замѣнивъ въ уравненіи (6)  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и ихъ выраженія въ функціяхъ времени, получимъ уравненія относительнаго движенія точки. Исключивъ изъ нихъ время, найдемъ уравненія относительной траекторіи точки.

*Примѣръ.* Рѣзецъ движется по прямой; тѣло вращается равномерно около оси, параллельной этой прямой.

$$\varphi = kt, \quad x = a, \quad y = 0, \quad z = nt.$$

Рѣзецъ вычерчиваетъ въ тѣлѣ винтовую линію.

Найдя производныя по времени:  $\xi'$ ,  $\eta'$ ,  $z'$  и  $\xi''$ ,  $\eta''$ ,  $z''$ , мы получимъ скорость и ускореніе относительнаго движенія точки.

-----

Общій случай, когда точка совершаетъ относительное движеніе по отношенію къ тѣлу, движущемуся какъ угодно, будетъ разсмотрѣнъ ниже во главѣ VII.

----- " -----

## ГЛАВА IV.

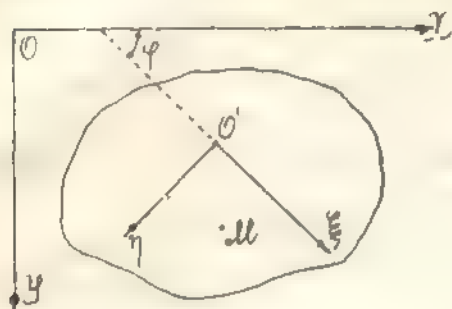
### § 1.

*Движеніе твердаго тѣла, параллельное неподвижной плоскости, или движеніе плоской неизмѣняемой фигуры въ ея плоскости\*).*

Примемъ плоскость, въ которой движется неизмѣняемая фигура, за плоскость  $XCY$  (черт. 15); пусть  $O'\xi$  и  $O'\eta$  будутъ координатныя оси движущіяся вмѣстѣ съ фигурой, и  $\varphi$  уголъ, образуемый осью  $O'\xi$  съ осью  $OX$ ; абсолютныя координаты какой-нибудь точки  $M$  фигуры обозначимъ черезъ  $x, y$ ; относительныя

\*) Аналитическое разсмотрѣніе движенія, составляющее дополненіе къ соотвѣствующей статьѣ первой части курса. См. "Твор. Механика" часть I.

ея координаты через  $\xi, \eta$ ; вследствие неизмѣняемости фигуры координаты  $\xi, \eta$



Чертежъ 15.

сохраняють для каждой точки фигуры постоянныя значенія при движеніи фигуры; измѣняются при этомъ только координаты  $x$  и  $y$ . Если абсолютныя координаты точки  $O'$  обозначимъ черезъ  $x_0, y_0$ , то движеніе фигуры

опредѣляется уравненіями:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= f_1(t), \\ y_0 &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Зная функціи:  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ , мы для каждого момента времени можемъ найти соответствующее положеніе фигуры.

Уравненія, связывающія абсолютныя координаты съ относительными, будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi \\ y &= y_0 + \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Чтобы получить уравненіе траекторіи какой-либо точки фигуры, мы должны въ формулы (2) подставить вмѣсто  $\xi$  и  $\eta$  относительныя координаты этой точки, вмѣсто  $x_0, y_0, \varphi$  ихъ значенія изъ (1) и заключить время; уравненіе траекторіи будетъ вида:

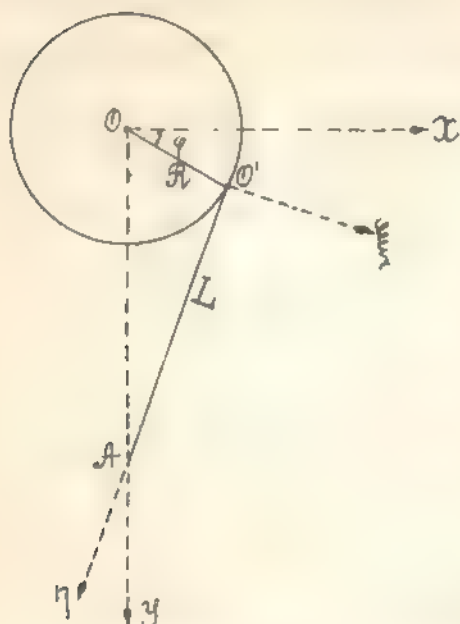
$$f(x, y) = 0 \dots \dots \dots (3)$$

**Примѣръ 1-й.** Найдемъ уравненія (1) для движенія шатуна (черт.16) въ случаѣ равномернаго движенія:

$$\varphi = nt.$$

Точку  $O'$  примем за начало относительных координат и ось  $O'\eta$  направим вдоль катуны. Пусть:

$$OO' = R \quad \text{и} \quad OA = L.$$



Чертежъ 16.

Тогда имѣемъ:

$$x = R \cdot \cos nt,$$

$$y = R \cdot \sin nt.$$

Уголъ  $\varphi$  найдемъ изъ того условія, что точка  $A(\xi=0, \eta=L)$  движется по оси  $OY$ ; следовательно — но, для этой точки:

$$x = x_0 - \eta \cdot \sin \varphi = R \cos nt - L \cdot \sin \varphi = 0,$$

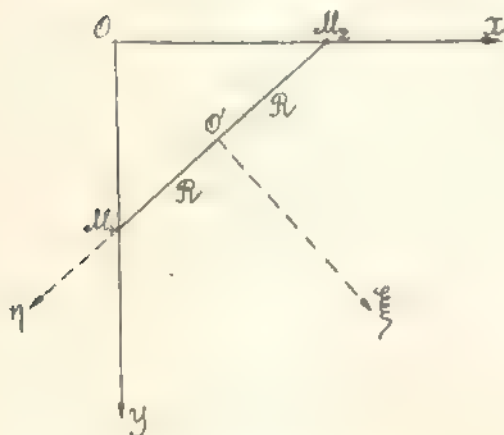
откуда

$$\sin \varphi = \frac{R}{L} \cdot \cos nt.$$

и следовательно:

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{R}{L} \cos nt \right).$$

Примръ 2-ой. Эллиптическій циркуль.



Чертежъ 17.

Пусть двѣ точки плоской фигуры движутся по перпендикулярнымъ прямымъ: одна  $M_1$  по оси  $OY$ , другая  $M_2$  по оси  $OX$  (черт.17); найдемъ уравненія (1) движенія этой фигуры.

За начало относительныхъ координатъ беремъ точку  $O'$ , середину прямой  $M_1M_2$ ; такъ

что  $M_1O' = OM_2 = R$ . Пусть ось  $O'\xi$  перпендикулярна къ  $M_1M_2$ , а ось  $O'\eta$  совпадаетъ съ  $M_1M_2$ . Относительныя координаты точки  $M_1$  будутъ:  $\xi_1 = 0$ ,  $\eta_1 = R$ , а точки  $M_2$ :  $\xi_2 = 0$ ,  $\eta_2 = -R$ . Абсолютныя координаты точки  $M_1$  будутъ:  $x_1 = 0$ , и  $y_1$  — функція времени, точки  $M_2$ :  $x_2$  — функція времени и  $y_2 = 0$ . Уголъ  $\varphi$ , образуемый осью  $O'\xi$  съ осью  $OX$ , будетъ тоже некоторая функція времени.

Примѣняемъ формулы (2). Изъ первой для точки  $M_1$  имѣемъ:

$$0 = x_0 - R \sin \varphi;$$

изъ второй для точки  $M_2$

$$0 = y_0 - R \cos \varphi,$$

гдѣ  $x_0$ ,  $y_0$  абсолютныя координаты точки  $O'$ .

Получимъ два уравненія съ тремя неизвѣстными:  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\varphi$ ; но уголъ  $\varphi$  можетъ какъ угодно измѣняться съ теченіемъ времени, такъ какъ, напримѣръ, точка  $M_1$  можетъ двигаться по оси  $OY$  съ какою-угодно скоростью; полагая  $\varphi = F(t)$ , получимъ слѣдующія уравненія, выражающія движеніе фигуры:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= R \sin \varphi, \quad y_0 = R \cos \varphi, \\ \varphi &= F(t). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1_1)$$

Найдемъ теперь уравненія траекторій какой-либо точки ( $\xi$ ,  $\eta$ ) фигуры. Воспользуемся опять уравненіями (2):

$$\left. \begin{aligned} x &= (R - \eta) \sin \varphi + \xi \cos \varphi, \\ y &= \xi \sin \varphi + (R + \eta) \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2_1)$$

Чтобы исключить время, исключимъ  $\varphi$ . Рѣшаемъ первое уравненіе относительно  $\sin \varphi$ , второе относительно  $\cos \varphi$ :

$$\begin{aligned} (R + \eta) x - \xi y &= (R^2 - \eta^2 - \xi^2) \sin \varphi, \\ -\xi x + (R - \eta) y &= (R^2 - \eta^2 - \xi^2) \cos \varphi \end{aligned}$$

Возводя полученныя выраженія въ квадратъ и складывая, по-



лучимъ уравненіе искомой траекторіи:

$$\left[ (R+\eta) x - \xi y \right]^2 + \left[ \xi x - (R-\eta) y \right]^2 = (R^2 - \eta^2 - \xi^2)^2 \quad (3_1)$$

Въ этомъ уравненіи  $\xi$  и  $\eta$  величины постоянныя, а переменными будутъ  $x$  и  $y$ . По отношенію къ  $x$  и  $y$  уравненіе  $(3_1)$  второй степени, слѣдовательно, траекторія есть кривая второго порядка, и именно эллипсъ, ибо, какъ видно изъ уравн.  $(2_1)$ , она не имѣетъ бесконечно удаленныхъ точекъ.

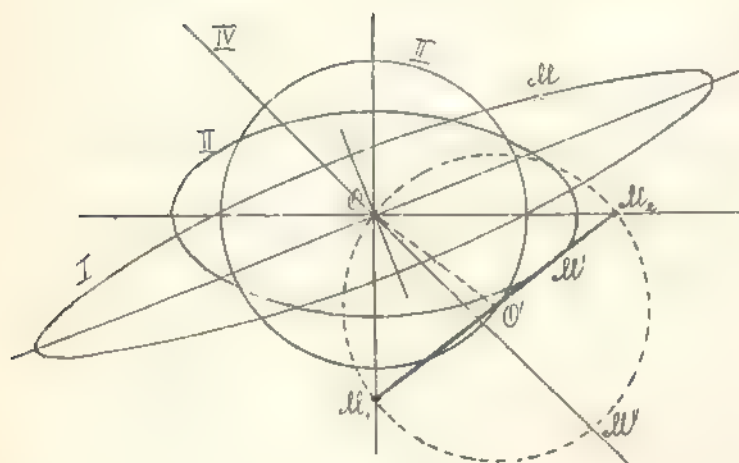
Итакъ, всякая точка разсматриваемой фигуры описываетъ эллипсъ, центръ котораго находится въ точкѣ  $O$ , но оси, вообще говоря не совпадаютъ съ осями  $OX$  и  $OY$  (напримѣръ, на черт. 18 эллипсъ I, описываемый точкою  $M$ ).

Частные случаи: 1) для точекъ, лежащихъ на прямой  $M_1 M_2$ , т.е. для такихъ, для которыхъ  $\xi = 0$ , уравненіе траекторіи будетъ слѣдующее:

$$(R+\eta)^2 x^2 + (R-\eta)^2 y^2 = (R^2 - \eta^2)^2,$$

или

$$\frac{x^2}{(R-\eta)^2} + \frac{y^2}{(R+\eta)^2} = 1 \quad \dots \dots (3_2)$$



Чертежъ 18.

Изъ  $(3_2)$  слѣдуетъ, что каждая изъ точекъ прямой  $M_1 M_2$  описываетъ эллипсъ, центръ котораго на началѣ координатъ  $O$  и оси совпадаютъ съ осями координатъ (на черт. 18 эллипсъ II, описываемый точкою

$M'$ ).

2) Найдемъ точки, вычерчивающія окружность.

Уравненіе траекторіи въ этомъ случаѣ должно принять видъ:

$$x^2 + y^2 = k^2 ;$$

коэффициенты при  $x^2$  и  $y^2$  будутъ равны между собою при  $\eta = 0$ :

$$(R + \eta)^2 + \xi^2 = (R - \eta)^2 + \xi^2 ;$$

члены, содержащіе произведеніе  $x\eta$ , исчезаютъ при  $\xi = 0$ , слѣдовательно, окружность описываетъ единственная точка  $C'(\xi = 0, \eta = 0)$  (на черт. 18 окружность III).

Уравненіе окружности будетъ:

$$x^2 + y^2 = R^2 \dots\dots\dots (3_2)$$

3) Найдемъ точки, вычерчивающія прямую.

Когда

$$R^2 - \eta^2 - \xi^2 = 0 \dots\dots (k)$$

уравненіе (3<sub>1</sub>) обратится въ систему прямыхъ, проходящихъ черезъ точку 0 :

$$(R + \eta) \cdot x - \xi \cdot y = 0 \dots\dots\dots (m)$$

$$\xi \cdot x - (R - \eta) y = 0 \dots\dots\dots (n)$$

Эти два уравненія выражаютъ одну и ту же прямую. Въ самомъ дѣлѣ, изъ (m) слѣдуетъ:

$$\frac{y}{x} = \frac{R + \eta}{\xi} ,$$

и изъ (n):

$$\frac{y}{x} = \frac{\xi}{R - \eta} ;$$

но

$$\frac{R + \eta}{\xi} = \frac{\xi}{R - \eta}$$

потому что, какъ видно изъ уравненія (k)

$$R^2 - \eta^2 = \xi^2.$$

Изъ уравненія (к) слѣдуетъ, что прямая линія описываетъ всѣ точки окружности, проходящей черезъ точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $O$  (на черт. 18 укавана пунктиромъ эта окружность и проведена прямая IV, описываемая точкой  $M'$  ).

Разсматриваемое движеніе воспроизводится въ приборѣ, который служить для черченія эллипсовъ и потому называется "эллиптическимъ циркулемъ".

Для того, чтобы найти уравненіе кривой, которую данная неподвижная точка пространства  $(x, y)$  вычерчиваетъ на движущейся плоской фигурѣ, мы должны въ формулахъ (2) абсолютнымъ координатамъ  $x$  и  $y$  придать постоянныя значенія, соответствующія данной точкѣ, и исключить время. Очевидно, получимъ то же уравненіе (3).

$$f(x, y) = 0,$$

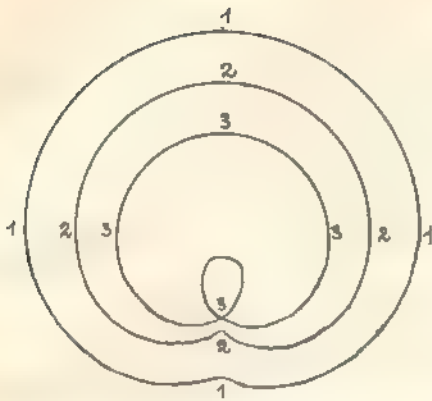
но переменными въ этомъ уравненіи будутъ теперь уже  $\xi$  и  $\eta$ . Въ случаѣ эллиптическаго циркуля уравненіе кривой, вычерчиваемой неподвижной точкой, будетъ ур. (3<sub>1</sub>); это уравненіе по отношенію къ переменнымъ  $\xi$  и  $\eta$  будетъ четвертой степени, слѣдовательно, соответствующая кривая будетъ четвертаго порядка и именно нѣкоторая эпитрохоида одной изъ формъ, изображенныхъ на черт. 19.

## § 2. Скорости точекъ плоской фигуры.

Проекція скорости какой-либо точки плоской фигуры, на основаніи ур. (2) будутъ:

$$\left. \begin{aligned} v \cdot \cos(v, X) = x' &= x'_0 - (\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi' = x'_0 - (y - y_0) \varphi', \\ v \cdot \cos(v, Y) = y' &= y'_0 + (x \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi' = y'_0 + (x - x_0) \varphi'. \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

Замѣчая, что первые члены въ выраженіяхъ  $x'$  и  $y'$  пред-



Чертеж 19.

ставляють проєкції скорости точки  $O'$ , а вторые члены - проєкции вращательной скорости вокруг точки  $O'$ , заключаемъ, что скорость точки фигуры равна геометрической суммѣ скорости точки  $O'$  и вращательной скорости вокругъ точки  $O'$ . Если  $v_o$  обозначаетъ скорость точки  $O'$ , а

$w$  - вращательную скорость вокругъ  $O'$ , то

$$\bar{v} = \bar{v}_o + \bar{w}.$$

Точку  $O'$  называютъ полюсомъ, а полученная теорема можетъ быть формулирована такъ: скорость всякой точки фигуры равна геометрической суммѣ скорости полюса  $O'$  и вращательной скорости точки вокругъ этого полюса.

Найдемъ такую точку  $(x_o, y_o)$ , скорость которой равна нулю. Для этого необходимо, чтобы:

$$\begin{aligned} x'_o + (y_o - y_o) \cdot \varphi' &= 0, \\ y'_o + (x_o - x_o) \cdot \varphi' &= 0; \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} x_o &= x_o - \frac{y'_o}{\varphi'}, \\ y_o &= y_o + \frac{x'_o}{\varphi'}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

Изъ (5) слѣдуетъ, что абсолютныя координаты точки, скорость которой равна нулю, суть нѣкоторыя функции времени; значитъ, въ плоскости неизмѣняемой фигуры въ каждый моментъ существуетъ такая точка, которая, принадлежа фигурѣ, или будучи неизмѣнно съ нею связана, имѣетъ въ этотъ моментъ скорость, равную нулю; эта точка и есть мгновенный центръ. Геометриче-

ское мѣсто мгновенныхъ центровъ на неподвижной плоскости есть кривая, которая называется *неподвижной центроидой*; уравнение ея  $F(x_0, y_0) = 0$  получимъ изъ уравненія (5), исключивъ время  $t$ .

Пользуясь формулами, выражающими относительныя координаты точки черезъ абсолютныя:

$$\begin{aligned}\xi &= (x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi, \\ \eta &= -(x - x_0) \sin \varphi + (y - y_0) \cos \varphi;\end{aligned}$$

съ помощью уравненій (5) мы найдемъ относительныя координаты мгновеннаго центра:

$$\left. \begin{aligned}\xi_c &= -\frac{y'_0}{\varphi'} \cdot \cos \varphi + \frac{x'_0}{\varphi'} \sin \varphi = (x'_0 \sin \varphi - y'_0 \cos \varphi) \frac{1}{\varphi'}, \\ \eta &= -\frac{y'_0}{\varphi'} \sin \varphi + \frac{x'_0}{\varphi'} \cos \varphi = (x'_0 \cos \varphi + y'_0 \sin \varphi) \frac{1}{\varphi'}.\end{aligned} \right\} \dots (6)$$

Исключивъ время ( $t$ ) изъ уравни. (6), получимъ уравненіе:

$$\Phi(\xi_c, \eta) = 0$$

кривой, которую мгновенный центръ вычерчиваетъ въ движущемся тѣлѣ, т.е. уравненіе *подвижной центроиды*.

Возьмемъ приведенный выше примѣръ 2-ой: *эллиптическій циркуль*.

$$\begin{aligned}x_0 &= R \sin \varphi, \\ y_0 &= R \cos \varphi, \\ \varphi &= \tilde{\varphi}(t).\end{aligned}$$

Пользуясь формулами (5), находимъ абсолютныя координаты мгновеннаго центра:

$$\left. \begin{aligned}x_c &= R \sin \varphi + \tilde{\varphi} \sin \varphi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi'} = 2R \sin \varphi, \\ y_c &= R \cos \varphi + \tilde{\varphi} \cos \varphi \cdot \frac{\varphi'}{\varphi'} = 2R \cos \varphi.\end{aligned} \right\} \dots (5)$$

Исключивъ отсюда время, находимъ уравненіе *неподвижной*



центроиды:

$$x_c^2 + y_c^2 = 4R^2.$$

Неподвижная центроида есть, следовательно, окружность радиуса  $2R$  съ центромъ въ точкѣ  $O$  (черт. 20).

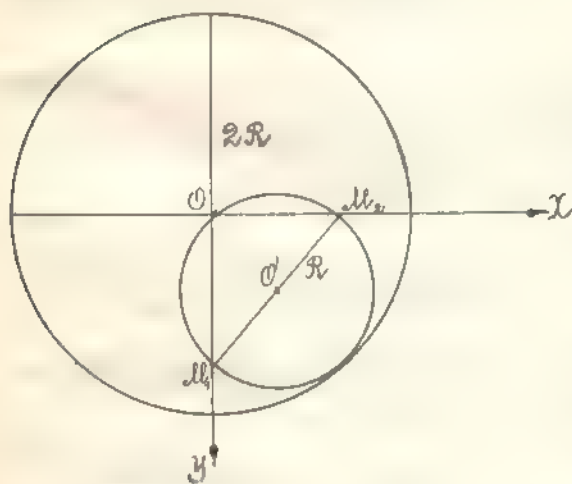
Относительныя координаты мгновеннаго центра на основаніи ур. (6) будутъ:

$$\xi_c = (R \cos \varphi \cdot \sin \varphi + R \cos \varphi \sin \varphi) \frac{\varphi'}{\dot{\varphi}} = R \sin 2\varphi,$$

$$\eta_c = (-R \sin^2 \varphi + R \cos^2 \varphi) \frac{\varphi'}{\dot{\varphi}} = R \cos 2\varphi.$$

Исключая  $t$ , получимъ уравненіе подвижной центроида:

$$\xi_c^2 + \eta_c^2 = R^2.$$



Чертежъ 20.

Подвижная центроида есть, следовательно, окружность радиуса  $R$ , съ центромъ въ точкѣ

Взявши втория производныя по времени отъ ур. (2), мы найдемъ выраженія для проекцій ускоренія какой-либо точки фигуры. Приравнивая эти выраженія ну-

лю, мы получимъ уравненія для опредѣленія координатъ точки, ускореніе которой въ моментъ  $t$  равно нулю; эта точка называется центромъ ускореній.

## ГЛАВА V.

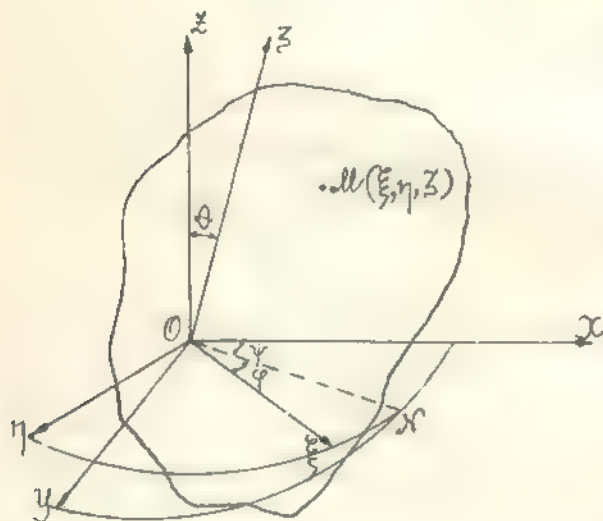
## § 1. Вращение твердого тела вокруг неподвижной точки \*).

Возьмем две прямоугольные системы координатных осей с общим началом в неподвижной точке  $O$ : одна система, с осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , неподвижна в пространстве, другая, с осями  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $Oz$ , неизменно связана с телом (черт. 21).

Положение осей  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $Oz$ , мы определяем следующими тремя углами: углом  $\angle Oz - \theta$  \*\*) и двумя углами, образуемыми

осями  $O\xi$  и  $Ox$  с прямой  $OM$ , по которой пересекаются плоскости  $xOy$  и  $\xi O\eta$ , т.е. углом  $\angle MO\xi = \varphi$  и углом  $\angle MOx = \psi$ .

Эти углы будем отсчитывать следующим образом:  $\theta$  от  $Oz$  к  $Oz$ , слева направо для наблюдателя, расположенного по  $OM$ ;  $\varphi$  от  $OM$  к  $O\xi$  в такую сторону,



Чертежъ 21.

чтобы при переходѣ отъ  $O\xi$  къ  $O\eta$  уголъ  $\varphi$  возрасталъ на  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\psi$  отъ  $Ox$  къ  $OM$  в ту сторону, гдѣ находится ось  $Oy$ .

Примѣръ: Тѣло вращается равномерно съ угловой скоростью  $k$

\*) Аналитическое рассмотрение движения, составляющее дополнение къ соответствующей статьѣ первой части курса. См. "Тезисы. Механика", ч. I.

\*\*) Греческія буквы:  $\varphi$  (фи),  $\psi$  (пси) и  $\theta$  (тета).

вокругъ оси  $OZ$ , которая сама равномерно вращается съ угловой скоростью  $n$  вокругъ оси  $OZ$ , оставаясь къ ней перпендикулярной.

Пусть въ моментъ  $t=0$  ось  $OZ$  находится въ плоскооти  $XOX$ , тогда уравненія движенія будутъ:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{2}, & \varphi &= kt, \\ \psi &= \frac{\pi}{2} + nt.\end{aligned}$$

При вращеніи тѣла вокругъ точки  $O$  углы  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ , измѣняются съ теченіемъ времени, а потому уравненія движенія тѣла будутъ:

$$\theta = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t), \quad \psi = f_3(t) \dots \dots \dots (1)$$

Косинусы девяти угловъ между направленіями осей абсолютныхъ и относительныхъ координатъ обозначимъ для краткости буквами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  со значками 1, 2, 3, какъ видно изъ слѣдующей таблицы:

	$x$	$y$	$z$
$\xi$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$\eta$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$\zeta$	$c_1$	$c_2$	$c_3$

Эти девять косинусовъ связаны между собою шестью равенствами (2) и (3)

$$\left. \begin{aligned}a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0, \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 &= 0, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3) *$$

\*) Разделив (2) и (3) соответственно в уравнениях (2<sub>1</sub>) и (2<sub>2</sub>)

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 &= 1, \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2_1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 &= 0, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 &= 0, \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2_2)$$

Преобразуя постепенно координатную систему  $OXYZ$  в систему  $O\xi\eta\zeta$ , получим следующие выражения для девики  $\cos$ -ов через три угла  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi \cdot \cos\theta, \\ a_2 &= \cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi \cdot \cos\theta, \\ a_3 &= \sin\varphi \cdot \sin\psi, \\ b_1 &= -\sin\varphi \cdot \cos\psi - \cos\varphi \cdot \sin\psi \cdot \cos\theta, \\ b_2 &= -\sin\varphi \cdot \sin\psi + \cos\varphi \cdot \cos\psi \cdot \cos\theta, \\ b_3 &= \cos\varphi \cdot \sin\psi, \\ c_1 &= \sin\psi \cdot \sin\theta, \\ c_2 &= -\cos\psi \cdot \sin\theta, \\ c_3 &= \cos\theta. \end{aligned}$$

В вышеуказанном примере:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\cos kt \cdot \sin nt, & a_2 &= \cos kt \cdot \cos nt, & a_3 &= \sin kt, \\ b_1 &= \sin kt \cdot \sin nt, & b_2 &= -\sin kt \cdot \cos nt, & b_3 &= \cos kt, \\ c_1 &= \cos nt, & c_2 &= \sin nt, & c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Относительныя координаты точки связаны съ абсолютными слѣдующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta, \\ y &= a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta, \\ x &= a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

Приведенныя здѣсь формулы извѣстны уже изъ курса аналитической геометріи.

Уравненія траекторіи точки  $M(\xi, \eta, \zeta)$  мы получимъ изъ урavn.(4), придавъ  $\xi, \eta, \zeta$  постоянныя значенія и исключивъ время, которое входитъ въ выраженіе косинусовъ. Полученныя два уравненія будутъ выражать, очевидно, нѣкоторую сферическую кривую.

Уравненія кривой, которую неподвижная точка  $(x, y, z)$  пространства вычерчиваетъ внутри движущагося тѣла, получимъ, когда въ урavn.(4) координатамъ  $x, y, z$  придадимъ постоянныя значенія и исключимъ время. Очевидно, получатся тѣ же самыя (по виду) уравненія, что и для траекторіи точки  $M(\xi, \eta, \zeta)$ , но переменными въ нихъ будутъ уже  $\xi, \eta, \zeta$ , а  $x, y, z$  - постоянными.

**Примѣчаніе:** Для нахожденія этой кривой можно, конечно, воспользоваться урavn.(5), выражающими относительныя координаты черезъ абсолютныя:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_1 x + a_2 y + a_3 z, \\ \eta &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ \zeta &= c_1 x + c_2 y + c_3 z. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Исключивъ отсюда время, получимъ уравненія кривой.



§ 2. Скорости точек тела, вращающихся вокруг неподвижной точки.

Дифференцированиемъ по времени находимъ изъ уравн(4) для проекцій скорости  $v$  точки тѣла  $M$  ( $\xi, \eta, \zeta$ ) слѣдующія выраженія \*):

$$\left. \begin{aligned} v \cos(v, X) &= \frac{dx}{dt} = a'_1 \xi + b'_1 \eta + c'_1 \zeta, \\ v \cos(v, Y) &= \frac{dy}{dt} = a'_2 \xi + b'_2 \eta + c'_2 \zeta, \\ v \cos(v, Z) &= \frac{dz}{dt} = a'_3 \xi + b'_3 \eta + c'_3 \zeta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{da_1}{dt}, & b'_1 &= \frac{db_1}{dt}, & c'_1 &= \frac{dc_1}{dt}, \\ a'_2 &= \frac{da_2}{dt}, & b'_2 &= \frac{db_2}{dt}, & \dots \dots \dots & \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Чтобы вывести нѣкоторыя свойства скорости  $v$ , преобразуемъ формулы (6), подставивъ вмѣсто  $\xi, \eta, \zeta$ , ихъ выраженія изъ уравн. (5); - получимъ:

$$\frac{dx}{dt} = x(a_1 a'_1 + b_1 b'_1 + c_1 c'_1) + y(a_2 a'_1 + b_2 b'_1 + c_2 c'_1) + z(a_3 a'_1 + b_3 b'_1 + c_3 c'_1), \quad (\alpha)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(a_1 a'_2 + b_1 b'_2 + c_1 c'_2) + y(a_2 a'_2 + b_2 b'_2 + c_2 c'_2) + z(a_3 a'_2 + b_3 b'_2 + c_3 c'_2), \quad (\beta)$$

$$\frac{dz}{dt} = x(a_1 a'_3 + b_1 b'_3 + c_1 c'_3) + y(a_2 a'_3 + b_2 b'_3 + c_2 c'_3) + z(a_3 a'_3 + b_3 b'_3 + c_3 c'_3), \quad (\gamma)$$

Замѣчаемъ, что коэффициенты при  $x$  въ формулѣ ( $\alpha$ ), при  $y$  въ ( $\beta$ ) и при  $z$  въ ( $\gamma$ ) равны нулю; въ самомъ дѣлѣ, взявши первыя производныя по времени отъ уравн. (2), находимъ по сокращенію на два:

\*) Для каждой точки тѣла яв. относительныя координаты  $\xi, \eta, \zeta$  сохраняютъ постоянныя значенія при движеніи тѣла.

$$\left. \begin{aligned} a_1 a'_1 + b_1 b'_1 + c_1 c'_1 &= 0, \\ a_2 a'_2 + b_2 b'_2 + c_2 c'_2 &= 0, \\ a_3 a'_3 + b_3 b'_3 + c_3 c'_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

Крім того, дифференціюючи по времени уравн. (3), находимъ слѣдующія зависимости между остальными коэффициентами при  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , въ формулахъ ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ), ( $\gamma$ ):

$$\left. \begin{aligned} a_2 a'_3 + b_2 b'_3 + c_2 c'_3 &= -(a_3 a'_2 + b_3 b'_2 + c_3 c'_2), \\ a_3 a'_1 + b_3 b'_1 + c_3 c'_1 &= -(a_1 a'_3 + b_1 b'_3 + c_1 c'_3), \\ a_1 a'_2 + b_1 b'_2 + c_1 c'_2 &= -(a_2 a'_1 + b_2 b'_1 + c_2 c'_1). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

Обозначимъ для сокращенія письма лѣвую часть равенствъ (8) черезъ  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{R}$ , такъ что:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P} &= a_2 a'_3 + b_2 b'_3 + c_2 c'_3, \\ \mathcal{Q} &= a_3 a'_1 + b_3 b'_1 + c_3 c'_1, \\ \mathcal{R} &= a_1 a'_2 + b_1 b'_2 + c_1 c'_1. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8')$$

Тогда на основаніи уравн. (7), (8) и (8') мы получимъ слѣдующія выраженія для проекцій скорости какой-либо точки тѣла:

$$\left. \begin{aligned} v \cos(v, X) &= x \mathcal{Q} - y \mathcal{R}, \\ v \cos(v, Y) &= x \mathcal{R} - z \mathcal{P}, \\ v \cos(v, Z) &= y \mathcal{P} - x \mathcal{Q}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

[Въ примѣрѣ:  $\mathcal{P} = k \cos nt$ ,  $\mathcal{Q} = k \sin nt$ ,  $\mathcal{R} = n$ ].

Изъ выраженіи (9) выведемъ нѣкоторые заключенія:

Координаты ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) точки тѣла, скорость которой равна нулю, должны удовлетворять слѣдующимъ условіямъ:

$$\begin{aligned} x \mathcal{Q} - y \mathcal{R} &= 0, \\ x \mathcal{R} - z \mathcal{P} &= 0, \\ y \mathcal{P} - x \mathcal{Q} &= 0. \end{aligned}$$

или

$$\frac{y}{Q} = \frac{z}{R}; \quad \frac{z}{R} = \frac{x}{P}; \quad \frac{x}{P} = \frac{y}{Q}, \dots\dots\dots (\delta')$$

Такъ какъ одно изъ уравненій ( $\delta'$ ) есть слѣдствіе двухъ другихъ, то мы имѣемъ здѣсь два уравненія съ тремя неизвѣстными

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{Q} = \frac{z}{R} \quad \dots\dots\dots (10)$$

Изъ уравн. (10) слѣдуетъ, что координаты  $x, y, z$ , точки, скорость которой равна нулю, связаны двумя уравненіями первой степени; значить, существуетъ безчисленное множество точекъ, скорость которыхъ равна нулю. Всѣ эти точки лежатъ на прямой, проходящей черезъ начало координатъ, которая и выражается уравненіями (10). Если переменнѣй  $t$  дадимъ опредѣленное значеніе, то  $P, Q, R$ , получатъ опредѣленные значенія, и уравн. (10) выразитъ прямую, которая называется мгновенной осью тѣла для соответствующаго момента времени.

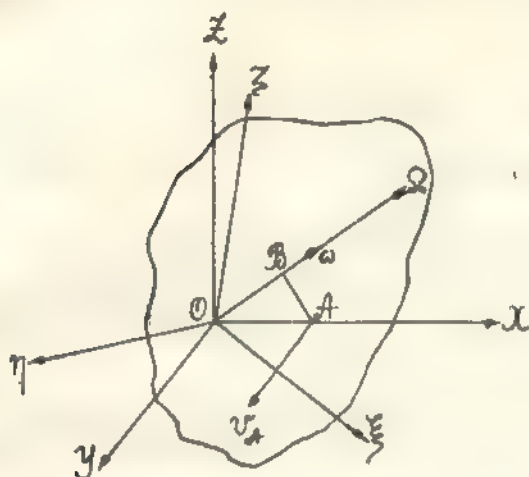
Мгновенная ось съ теченіемъ времени мѣняетъ свое направленіе въ пространствѣ, такъ какъ  $P, Q, R$  - функціи времени. (Въ примѣрѣ уравненія мгновенной оси будутъ:

$$\frac{x}{k \cos nt} = \frac{y}{k \sin nt} = \frac{z}{n} \quad \}.$$

Направленіе мгновенной оси обозначимъ черезъ  $\Omega$ ; на черт. 22 мгновенную ось представляетъ прямая  $O\Omega$ . На основаніи ур. (10) направленіе мгновенной оси ( $\Omega$ ) опредѣлимъ по формуламъ:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\Omega, x) &= \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \\ \cos(\Omega, y) &= \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \\ \cos(\Omega, z) &= \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

Угловая скорость  $\omega$ , съ которой тѣло вращается вокругъ мгновенной оси, равна\*)



отношенію скорости какой-либо точки тѣла къ ея кратчайшему разстоянію до оси.

Возьмемъ точку тѣла  $A$ , лежащую въ разсчитываемый моментъ времени на оси  $Ox$  въ разстояніи отъ начала координатъ, равномъ единицѣ

Чертежъ 23.

( $x=1, y=0, z=0$ ); кратчайшее ея разстояніе  $AB$  до оси  $OQ$  обозначимъ черезъ  $h$ :

$$AB = h.$$

Очевидно:

$$h = OA \cdot \sin(\widehat{AOB}) = 1 \sqrt{1 - \cos^2(\Omega, X)} = \sqrt{\frac{Q^2 + R^2}{P^2 + Q^2 + R^2}}.$$

На основаніи формулъ (9) проекціи скорости точки будутъ:

$$v_A \cos(v_A, X) = 0,$$

$$v_A \cos(v_A, Y) = X R = R,$$

$$v_A \cos(v_A, Z) = -X Q = -Q,$$

откуда

$$v_A = \sqrt{R^2 + Q^2}.$$

Такимъ образомъ, угловая скорость  $\omega$  выразится слѣдующей формулой:

$$\omega = \frac{v_A}{h} = \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2} \dots \dots \dots (12)$$

\*) См. "Теоретическая Механика", часть I.

Изъ уравн. (12) слѣдуетъ, что угловая скорость  $\omega$ , вообще говоря, зависитъ отъ времени, потому что  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{R}$  - функціи времени.

[ Въ примѣрѣ угловая скорость имѣетъ постоянную величину

$$\omega = \sqrt{k^2 + n^2} \quad ] .$$

Угловую скорость, какъ всякую величину, можно изображать графически - отрѣзкомъ прямой известной длины, въ зависимости отъ длины того отрѣзка, которымъ мы изобразимъ угловую скорость, равную единицѣ. Условившись откладывать угловую скорость по направленію мгновенной оси ( $O\Omega$ ), мы можемъ угловую скорость  $\omega$  рассматривать, какъ нѣкоторый векторъ, а, слѣдовательно, можемъ и проецировать ее на координатныя оси; - получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \omega \cos(\omega, X) &= \sqrt{\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2 + \mathcal{R}^2} \cdot \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2 + \mathcal{R}^2}} = \mathcal{P}, \\ \omega \cos(\omega, Y) &= \sqrt{\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2 + \mathcal{R}^2} \cdot \frac{\mathcal{Q}}{\sqrt{\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2 + \mathcal{R}^2}} = \mathcal{Q}, \\ \omega \cos(\omega, Z) &= \sqrt{\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2 + \mathcal{R}^2} \cdot \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{\mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2 + \mathcal{R}^2}} = \mathcal{R}. \end{aligned} \right\} \dots \dots (13)$$

Уравненія (13) дадутъ намъ кинематическое значеніе тѣхъ аналитическихъ выраженій, которыя мы выше обозначили черезъ  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{R}$ , именно:  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  и  $\mathcal{R}$  представляютъ проеціи угловой скорости на координатныя оси  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ .

Чтобы рѣшить вопросъ относительно того, въ какую сторону тѣло будетъ вращаться для наблюдателя, расположеннаго по мгновенной оси, предположимъ, что на одинъ моментъ мы взяли ось ( $Z$ , совпадающую съ мгновенной осью, и найдемъ, въ какую сторону направлена скорость точки  $A$  ?

Такъ какъ угловая скорость направлена по  $OZ$ , то  $\mathcal{P} = 0$ ,  $\mathcal{Q} = 0$  и  $\mathcal{R} > 0$ , слѣдовательно, по форм. (9):



$$v_A \cos(v_A, X) = 0,$$

$$v_A \cos(v_A, Y) = R,$$

$$v_A \cos(v_A, Z) = 0.$$

откуда слѣдуетъ, что скорость  $v_A$  направлена параллельно оси  $OY$  въ положительную ея сторону.

Такимъ образомъ, вращеніе вокругъ мгновенной оси, направленіе которой опредѣляется уравн. (11), происходитъ *слева направо* для наблюдателя, расположеннаго по направленію угловой скорости.

Исключивъ изъ уравн. (10) время, мы получимъ уравненіе поверхности — неподвижнаго аксиода.

[ Въ примѣръ — неподвижный аксиодъ будетъ круглый конусъ, ось котораго есть ось  $OZ$  :

$$x^2 + y^2 - \frac{k^2}{n^2} z^2 = 0. ]$$

Чтобы получить уравненіе подвижнаго аксиода, мы должны найти проекціи угловой скорости  $\omega$  на координатныя оси  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $Oz$ , движущіяся вмѣстѣ съ тѣломъ:

$$\left. \begin{aligned} \omega \cos(\omega, \xi) &= p = a_1 P + a_2 Q + a_3 R, \\ \omega \cos(\omega, \eta) &= q = b_1 P + b_2 Q + b_3 R, \\ \omega \cos(\omega, z) &= r = c_1 P + c_2 Q + c_3 R. \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

По формуламъ (14) найдемъ  $p$ ,  $q$ ,  $r$ , и тогда уравненія мгновенной оси въ относительныхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{z}{r} \dots \dots \dots (15)$$

Исключивъ изъ уравн. (15) время, получимъ уравненіе подвижнаго аксиода:

$$F(\xi, \eta, z) = 0.$$

Проекції скорости  $v$  какой-либо точки тѣла, имѣющей координаты  $\xi, \eta, z$ , на оси  $O\xi, O\eta, Oz$ , выражаются черезъ  $\xi, \eta, z$  формулами, подобными формуламъ (9):

$$v \cos(v, \xi) = zq - \eta r,$$

$$v \cos(v, \eta) = \xi r - zq,$$

$$v \cos(v, z) = \eta r - \xi q.$$

(Въ примѣръ имѣемъ:  $r = n \sin kt, q = n \cos kt, z = k.$ )

Уравненія мгновенной оси въ относительныхъ координатахъ будутъ:

$$\frac{\xi}{n \sin kt} = \frac{\eta}{n \cos kt} = \frac{z}{k};$$

отсюда, уравненіе подвижного аксонда

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{n^2}{k^2} z^2 = 0.$$

Слѣдовательно, подвижной аксондъ есть круглый конусъ, ось котораго совпадаетъ съ осью  $Oz$ ).

## Г Л А В А VI.

### ДВИЖЕНІЕ СВОБОДНАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА.

(Общій случай движенія твердаго тѣла).

#### § 1. Геометрическое рѣшеніе.

Положеніе свободнаго твердаго тѣла вполне опредѣляется положеніемъ трехъ его точекъ, не лежащихъ на одной прямой.

**Теорема.** При движеніи тѣла въ общемъ случаѣ всякое положеніе тѣла можетъ быть получено изъ какого-угодно другого по-



Движеніе тѣла, состоящее изъ вращенія вокругъ нѣкоторой оси и поступательнаго движенія вдоль этой оси, называется *винтовымъ движеніемъ*. Ось называется при этомъ *винтовой осью* или *осью вращенія и скользянія*.

Основной случай такого движенія представляетъ движеніе винта въ неподвижной гайкѣ.

*Творама.* При движеніи тѣла въ общемъ случаѣ всякое положеніе его можетъ быть получено изъ какого-нибудь другаго положенія посредствомъ винтового движенія вокругъ нѣкоторой оси.

Намъ нужно доказать, что вращеніе вокругъ оси  $KL$  и поступательное движеніе по направленію  $AA'$  (см. черт. 23) можно замѣнить винтовымъ движеніемъ вокругъ нѣкоторой оси.

Замѣнимъ поступательное движеніе по прямой  $AA'$  двумя поступательными движеніями: переведемъ сначала точку  $A$  прямолинейнымъ движеніемъ изъ  $A$  въ  $A_1$ , а затѣмъ изъ  $A_1$  прямолинейнымъ же движеніемъ въ  $A'$ , причемъ  $AA_1 \perp KL$ , а  $A_1A' \parallel KL$ . Очевидно, вращательное движеніе тѣла вокругъ оси  $KL$  и поступательное движеніе его, перпендикулярное къ  $KL$ , составляютъ вмѣстѣ движеніе, параллельное неподвижной плоскости (перпендикулярной къ  $KL$ ); а перемѣщеніе тѣла при такомъ движеніи, какъ мы знаемъ, всегда можно замѣнить вращеніемъ вокругъ нѣкоторой оси  $MM' \parallel KL$ . Присоединяя къ этому движенію поступательное движеніе по  $AA'$ , которая параллельна  $MM'$ , мы и получимъ въ результатѣ *винтовое движеніе* тѣла.

Соотвѣтствующій винтъ можно легко построить слѣдующимъ образомъ: возьмемъ круглый цилиндръ, ось котораго будетъ  $MM'$  (черт. 24), а радіусъ равенъ единицѣ длины; пусть  $\varphi$  будетъ тотъ уголъ (выраженный въ частяхъ радіуса), на который тѣло

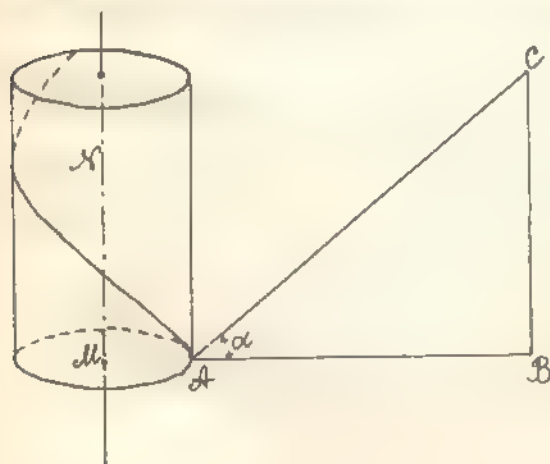
должно быть повернуто около оси; наведемъ на цилиндръ прямоугольный треугольникъ  $ABC$ , въ которомъ уголъ  $\alpha$  определяется изъ уравненія:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A, A'}{\varphi}$$

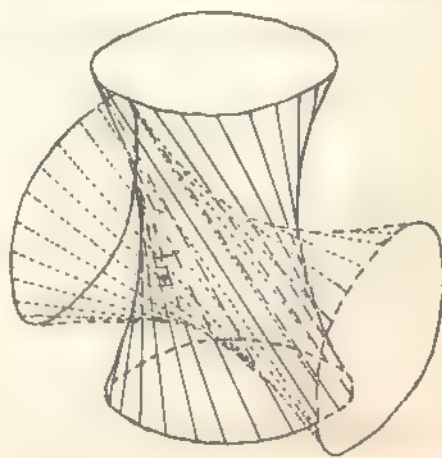
тогда гипотенуза  $AC$  образуетъ искомую винтовую линію.

*Слѣдствіе.* Доказанная теорема справедлива, какъ бы мало перемѣщеніе тѣла не было, слѣдовательно, она справедлива и для бесконечно-малого перемѣщенія.

Такимъ образомъ, при разсматриваемомъ движеніи тѣло въ началѣ и въ концѣ каждаго бесконечно-малого промежутка времени  $\Delta t$  занимаетъ такіа два положенія, что изъ перваго во второе оно можетъ быть перемѣщено посредствомъ винтового движенія около нѣкоторой оси; поэтому движеніе тѣла въ общемъ случаѣ можетъ быть разсматриваемо, какъ предѣльный случай ряда послѣдовательныхъ винтовыхъ движеній; при этомъ ось винта измѣняетъ съ теченіемъ времени свое положеніе и въ пространствѣ и внутри тѣла. Эта ось называется *мгновенной винтовой осью*, или *мгновенной осью вращенія и скольженія*. Мгновенная винтовая



Чертежъ 24.



Чертежъ 25.

ось описываетъ при своемъ движеніи двѣ линейчатыхъ поверхности, - одну въ самомъ движущемся тѣлѣ, другую въ пространствѣ;



первая поверхность называется *подвижным аксоидом* *мгновенных винтовых осей* (или "*подвижным аксоидом* *мгновенных осей* *вращения и скольжения*"), вторая, — *неподвижным аксоидом* *мгновенных винтовых осей* (или "*неподвижным аксоидом* *мгновенных осей* *вращения и скольжения*").

Простейший случай таких аксоидов представляет два однопольных *гиперболоида* (черт. 25). В каждый момент времени оба аксоида имеют, очевидно, общую производящую, которая и служит мгновенной винтовой осью для этого момента; кроме того, она является в то же время осью скольжения. Движение тела в общем случае можно рассматривать, как результат соединения *катача* подвижного аксоида винтовых осей по аксоиду неподвижному со *скольжением* вдоль по общей производящей.

## § 2. Аналитическое решение.

Возьмем две системы координатных осей: одну ( $OX, OY, OZ$ ) неподвижную в пространстве и другую ( $O'\xi, O'\eta, O'z$ ), неизменно связанную с телом (черт. 26).

Положение тела будет определено, если известны: положение точки  $O' (x_0, y_0, z_0)^*$  и направление координатных осей  $O'\xi, O'\eta, O'z$  относительно осей  $OX, OY, OZ$  (или относительно параллельных им осей:  $O'x', O'y', O'z'$ ); эти направления определяются тремя углами:  $\varphi, \psi, \theta^{**}$ .

Движение тела в общем случае вполне определено, если  $x_0, y_0, z_0, \varphi, \psi, \theta$  выражены известными функциями от времени; поэтому мы имеем шесть уравнений движения тела:

$$x_0 = f_1(t), y_0 = f_2(t), z_0 = f_3(t);$$

\*) Точку  $O'$  часто называют *полосом*.

\*\*) Через  $\varphi, \psi$  и  $\theta$  обозначим те же углы, что и в случае движения твердого тела вокруг неподвижной точки.

$$\varphi = F_1(t), \psi = F_2(t), \theta = F_3(t).$$

Всѣ изложенные выше случаи движенія твердаго тѣла могутъ быть рассматриваемы какъ частные случаи движенія, выражаемаго шестью написанными уравненіями:

для поступательнаго движенія:

$$F_1(t) = F_2(t) = F_3(t) = 0;$$

для вращенія около неподвижной оси ( $Ox$ ):

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = F_2(t) = F_3(t) = 0;$$

для движенія, параллельнаго неподвижной плоскости ( $xOy$ ):

$$f_3(t) = F_3(t) = F_2(t) = 0;$$

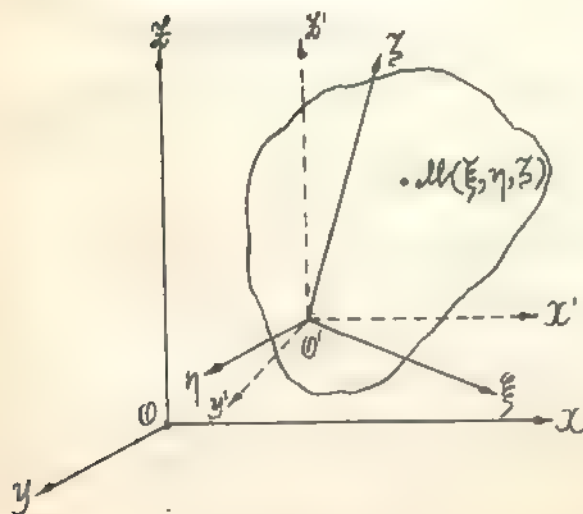
для движенія вокругъ неподвижной точки ( $O$ ):

$$f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = 0.$$

Примѣръ 1. Винтовое движеніе тѣла около оси  $Ox$  выражается уравненіями:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = kt,$$

$$\varphi = nt, \psi = 0, \theta = 0.$$



Чертежъ 26.



Чертежъ 27.

Примеръ 2. Тѣло равномерно вращается съ угловою скоростью  $k$  вокругъ оси  $O'Z$ , которая не находится въ одной плоскости съ неподвижною осью  $OZ$  (черт. 27); пусть  $OO' = a$  будетъ кратчайшее разстояніе между этими осями; положимъ, что ось  $O'Z$  неизмѣнно окрѣплена со стержнемъ, который расположенъ по  $OO'$  и вращается вокругъ оси  $OZ$  равномерно съ угловою скоростью  $n$ ; тогда уголъ  $\theta$  будетъ постоянный ( $\alpha$ ); предполагая, что въ моментъ  $t=0$ , ось  $O'Z$  находится въ плоскости  $X'O'x'$ , мы получимъ слѣдующія уравненія движенія тѣла:

$$\begin{aligned} x_0 &= a \cos nt, \quad y_0 = a \sin nt, \quad z_0 = 0, \\ \theta &= \alpha, \quad \varphi = kt, \quad \psi = \frac{\pi}{2} + nt. \end{aligned}$$

Основные формулы, выражающія абсолютныя координаты  $x, y, z$  какой-либо точки  $M$  черезъ ея относителныя координаты  $\xi, \eta, \zeta$ , будутъ:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta, \\ y &= y_0 + a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \zeta, \\ z &= z_0 + a_3 \xi + b_3 \eta + c_3 \zeta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)^*$$

Формулы, выражающія обратно относителныя координаты  $\xi, \eta, \zeta$  черезъ координаты абсолютныя  $x, y, z$ , будутъ слѣдующія:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= a_1(x-x_0) + a_2(y-y_0) + a_3(z-z_0), \\ \eta &= b_1(x-x_0) + b_2(y-y_0) + b_3(z-z_0), \\ \zeta &= c_1(x-x_0) + c_2(y-y_0) + c_3(z-z_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Исключая изъ уравн. (1) время  $t$ , которое входитъ въ выраженія  $x_0, y_0, z_0$  и девяти  $\cos$ -овъ  $a_1, a_2, \dots, c_3$ , полу-

\*) Значенія  $a, b, c, \dots$  см. стр. 50.

чимъ два уравненія проекторіи точки  $M$ . Тѣ же уравненія, если считать въ нихъ переменными относит. координаты  $\xi, \eta, \zeta$ , а постоянными абсол. координаты  $x, y, z$ , будутъ уравненіями кривой, вычерчиваемой въ тѣлѣ какой-либо неподвижной точкой  $(x, y, z)$  пространства.

Взявши производныя по времени отъ уравн. (1), мы получимъ слѣдующія выраженія для проекцій скорости точки  $M(\xi, \eta, \zeta)$  тѣла на оси абсолютныхъ координатъ:

$$\left. \begin{aligned} v \cos(v, X) &= \frac{dx}{dt} = x'_0 + a'_1 \xi + b'_1 \eta + c'_1 \zeta, \\ v \cos(v, Y) &= \frac{dy}{dt} = y'_0 + a'_2 \xi + b'_2 \eta + c'_2 \zeta, \\ v \cos(v, Z) &= \frac{dz}{dt} = z'_0 + a'_3 \xi + b'_3 \eta + c'_3 \zeta, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

гдѣ

$$x'_0 = \frac{dx_0}{dt}, \quad a'_1 = \frac{da_1}{dt}, \quad \dots\dots\dots$$

По этимъ формуламъ можемъ найти и величину и направление скорости точки  $M$ . Первые члены уравн. (3):  $x'_0, y'_0, z'_0$  суть проекціи скорости полюса  $O'$ , остальные же выражаютъ проекціи той скорости точки  $M$ , которую она имѣла бы, если бы точка  $O'$  была неподвижна, а тѣло вокругъ нея вращалось.

Такимъ образомъ, формулы (3) показываютъ, что скорость точки твердаго тѣла въ общемъ случаѣ движенія равна геометрической суммѣ скорости полюса ( $v_0$ ) и вращательной скорости ( $w$ ) точки во вращеніи тѣла вокругъ этого полюса:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{w}.$$

Преобразуемъ формулы (3), подставивъ вмѣсто  $\xi, \eta, \zeta$  ихъ выраженія изъ формулъ (2). Получимъ, очевидно, формулы, аналогичныя формуламъ (9):

$$\left. \begin{aligned} v \cos(v, X) &= x'_0 + (x - x_0)Q - (y - y_0)R, \\ v \cos(v, Y) &= y'_0 + (x - x_0)R - (z - z_0)P, \\ v \cos(v, Z) &= z'_0 + (y - y_0)P - (x - x_0)Q, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

гдѣ  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  имѣютъ тѣ же значенія, что и въ случаѣ вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки; какъ и тамъ, угловая скорость тѣла опредѣляется по величинѣ и направленію изъ формулъ:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}, \\ \cos(\omega, X) &= \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \\ \cos(\omega, Y) &= \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \\ \cos(\omega, Z) &= \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

(Въ нашемъ примѣрѣ

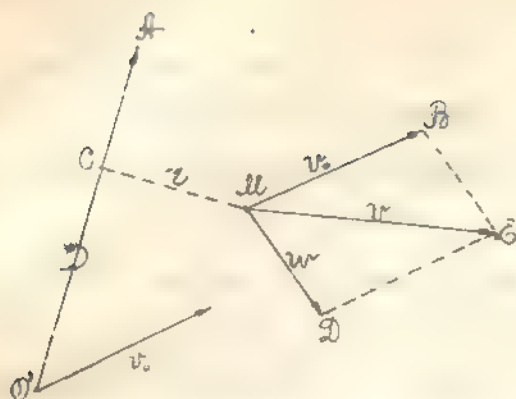
$$\begin{aligned} P &= k \sin \alpha \cos nt, \\ Q &= k \sin \alpha \sin nt, \\ R &= n + k \cos \alpha, \end{aligned}$$

и угловая скорость имѣетъ постоянную величину:

$$\omega = \sqrt{k^2 + n^2 + 2kn \cos \alpha}.$$

Основываясь на томъ, что скорость точки твердаго тѣла въ общемъ случаѣ движенія равна геометрической суммѣ скорости полюса и вращательной скорости вокругъ этого полюса, легко построить эту скорость. Пусть  $C'$  будетъ полюсъ,  $v_c$  скорость полюса и  $O'A = \omega$  угловая скорость тѣла (черт. 28). Желая построить скорость какой-либо точки тѣла  $M$ , проводимъ изъ  $M$  отрезокъ  $MB \neq v$ . Чтобы найти вращательную скорость ( $\omega$ ) точки  $M$ , опустимъ перпендикуляръ  $MC$  на  $O'A$ ; пусть  $MC = z$ , тог-





Чертеж 28.

да по величинѣ  $w = z \cdot \omega$  ;  
эту величину мы отложимъ  
по перпендикуляру къ пло-  
скости, проходящей черезъ  
точку  $M$  и ось  $OA$ , такъ  
чтобы для наблюдателя, рас-  
положеннаго по оси, она  
была направлена слѣва на-  
право; получимъ прямую

$MD$ , которая и будетъ представлять вращательную скорость  $w$ .  
Построивъ на  $MD$  и  $MB$  параллелограммъ, получимъ диагональ  
 $ME$ , которая и будетъ изображать скорость ( $v$ ) точки  $M$ .

## Г Л А В А VII.

### ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ВЪ ОБЩЕМЪ СЛУЧАЕ.

При разсмотрѣніи относительнаго движенія точки представ-  
ляется, какъ мы видѣли, двѣ главныя задачи:

- 1, Даны: движеніе тѣла и относительное движеніе точки, -  
требуется опредѣлить ея абсолютное движеніе;
- 2, Даны: движеніе тѣла и абсолютное движеніе точки, - тре-  
буется опредѣлить ея относительное движеніе.

Въ случаѣ относительнаго движенія точки по отношенію къ  
твердому тѣлу, которое движется какъ угодно, - въ первой за-  
дачѣ даны  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$ , и относительныя координаты  
точки -  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , какъ извѣстныя функціи времени; нужно най-  
ти абсолютныя координаты точки -  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , какъ функціи вре-  
мени; - рѣшеніе получается непосредственное изъ формулъ (1)

(стр. 64), во второй задаче даны:  $x_0, y_0, z_0, \varphi, \psi, \theta$ , а абсолютныя координаты точки  $x, y, z$ , какъ известныя функціи времени; требуется опредѣлить относительныя координаты точки  $\xi, \eta, \zeta$  въ функціяхъ времени; рѣшеніе получается изъ формулы (2) (стр. 64).

Соотношенія, существующія какъ между скоростями, такъ и ускореніями абсолютнаго и относительнаго движеній точки, въ общемъ случаѣ, мы получимъ изъ формулъ (1) (стр. 64), дифференцируя по времени: для скоростей - одинъ разъ, для ускореній - два раза, причемъ здѣсь координаты  $\xi, \eta, \zeta$  мы должны считать переменными; въ результатѣ получимъ известныя уже зависимости (a) и (b):

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_r \quad . (a)$$

- абсолютная скорость точки равна геометрической суммѣ ея относительной скорости и скорости той точки тѣла, съ которой она совпадаетъ;

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_r + \vec{k} \quad . . . . . (b)$$

- абсолютное ускореніе точки равно геометрической суммѣ трехъ ускореній: ускоренія относительнаго, ускоренія той точки тѣла, съ которой она совпадаетъ, и ускоренія Кориолисова или добавочнаго.

Проекціи добавочнаго ускоренія  $\vec{k}$  на координатныя оси выражаются по формуламъ:

$$k \cos(k, X) = 2(a_1 \xi' + b_1 \eta' + c_1 \zeta'),$$

$$k \cos(k, Y) = 2(a_2 \xi' + b_2 \eta' + c_2 \zeta'),$$

$$k \cos(k, Z) = 2(a_3 \xi' + b_3 \eta' + c_3 \zeta').$$

Кориолисово или добавочное ускореніе  $\vec{k}$ , какъ видно изъ этихъ формулъ, и въ общемъ случаѣ такъ же, какъ въ разсмотрѣнномъ ранѣе частномъ случаѣ, равно по величинѣ и направле-

нѣ удвоенной вращательной скорости той точки тѣла, радиус-векторъ которой, проведенный изъ полюса, равенъ по величинѣ и направленію относительной скорости  $u$ .

За исключеніемъ случая поступательнаго движенія тѣла, добавочное ускореніе  $k$  равно нулю только тогда, когда относительная скорость  $u$  параллельна мгновенной оси.

## Г Л А В А VIII.

### СЛОЖЕНІЕ ДВИЖЕНІЙ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

#### § 1.

Если тѣло 1-ое совершаетъ нѣкоторое относительное движеніе по отношенію къ тѣлу 2-ому и затѣмъ, вслѣдствіе движенія 2-го тѣла, - движеніе переносное со 2-ымъ, то абсолютное движеніе 1-го тѣла называютъ составнымъ движеніемъ, полученнымъ отъ сложенія двухъ составляющихъ движеній: относительнаго и переноснаго.

Нерѣдко 2-ое тѣло, относительно котораго разсматривается движеніе 1-го тѣла, замѣняется тремя координатными осями, неизмѣнно со 2-ымъ тѣломъ связанными и съ нимъ вмѣстѣ движущимися; тогда относительное движеніе 1-го тѣла складывается съ движеніемъ этихъ координатныхъ осей.

Могутъ представиться случаи, когда приходится складывать при движеніи: тѣло 1-ое совершаетъ относительное движеніе по отношенію къ тѣлу 2-му, затѣмъ переносное движеніе со вторымъ тѣломъ въ движеніи его по отношенію къ 3-му тѣлу, и, наконецъ, переносное движеніе вмѣстѣ съ 3-нимъ тѣломъ; въ этомъ случаѣ

абсолютное движение тѣла будетъ движѣніе составное изъ трехъ составляющихъ движеній.

Вообще можно разсматривать движѣніе тѣла, составное изъ сколькихъ-угодно составляющихъ движеній.

Извѣстно, что скорость точки въ составномъ движеніи равняется по величинѣ и направленію геометрической суммѣ ея скоростей въ составляющихъ движеніяхъ.

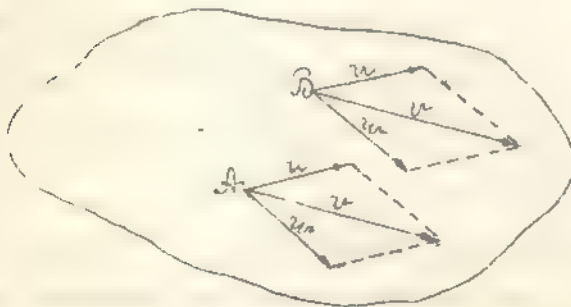
Въ случай двухъ движеній, обозначая черезъ  $u$  скорость точки въ относительномъ движеніи, черезъ  $u'$  скорость ея въ движеніи переносномъ, черезъ  $U$  - скорость въ движеніи составномъ, имѣемъ:

$$\vec{U} = \vec{u} + \vec{u}'$$

Примѣняя эту теорему къ той или другой точкѣ разсматриваемаго тѣла, мы будемъ въ состояніи по даннымъ составляющихъ движеніямъ тѣла опредѣлить его составное движѣніе.

## § 2. Сложеніе поступательныхъ движеній.

Пусть тѣло совершаетъ два поступательныхъ движенія: относительное со скоростью  $u$  и переносное со скоростью  $u'$ ; найдемъ составное движѣніе тѣла.



Чертежъ 29.

Въ первомъ составляющемъ движеніи тѣла всѣ точки тѣла имѣютъ одну и ту же скорость  $u$ , а во второмъ составляющемъ движеніи - скорость  $u'$ . Возьмемъ въ тѣлѣ какія-либо двѣ точки  $A$  и  $B$  (черт. 29).

Скорость точекъ  $A$  и  $B$  въ составномъ движеніи суть геометри-

ческія сумми ихъ скоростей въ составляющихъ движеніяхъ, т.е. по величинѣ и направленію изображаются діагоналями параллелограммовъ, соотвѣтственно построенныхъ на скоростяхъ  $u$  и  $w$  точекъ  $A$  и  $B$ .

Діагонали ( $u'$ ) обоихъ параллелограммовъ будутъ равны и одинаково направлены; слѣдовательно, въ составномъ движеніи тѣла скорости любыхъ двухъ точекъ  $A$  и  $B$  равны по величинѣ и направленію; поэтому, движеніе тѣла, составное изъ двухъ поступательныхъ движеній, есть тоже движеніе поступательное, причѣмъ скорость тѣла въ этомъ движеніи изображается діагональю параллелограмма, построеннаго на скоростяхъ составляющихъ движеній.

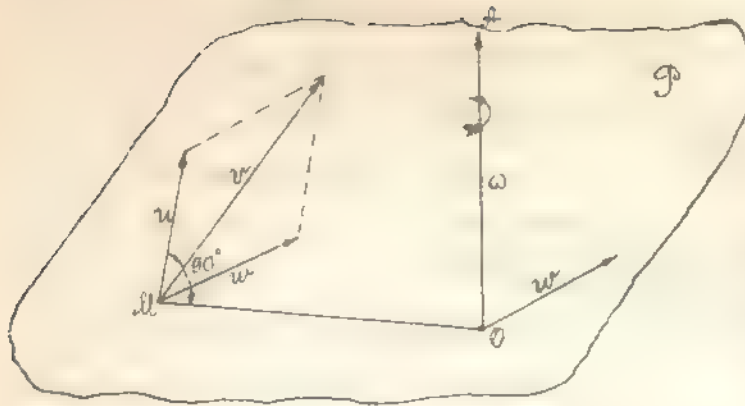
Введенный результатъ можетъ быть, очевидно, распространень на скорости сколькихъ-угодно составляющихъ поступательныхъ движеній: движеніе тѣла, составное изъ сколькихъ угодно поступательныхъ движеній, есть также движеніе поступательное; скорость этого поступательнаго движенія равняется *геометрической суммѣ* скоростей составляющихъ движеній: по величинѣ и направленію она изображается замыкающей многоугольника, стороны котораго имѣютъ величины и направленія скоростей составляющихъ движеній.

### § 3. Сложеніе движеній: вращательнаго вокругъ некоторой оси и поступательнаго по направленію, перпендикулярному къ этой оси.

Пусть тѣло совершаетъ вращательное движеніе вокругъ оси  $OA$  съ угловою скоростью  $\omega$ , и переносное поступательное со скоростью  $w$ , причѣмъ  $w \perp OA$  (черт. 30).

Составное движеніе тѣла будетъ движеніе, параллельное неподвижной плоскости, перпендикулярной къ оси вращенія тѣла.





Чертеж 30.

Проведемъ плоскость  $\mathcal{P}$ , перпендикулярную къ оси вращения  $OA$ ; отъ точки  $O$ , вдоль по оси, отложимъ угловую скорость тѣла  $\omega$  въ такомъ направленіи, чтобы наблюдатель, рас-

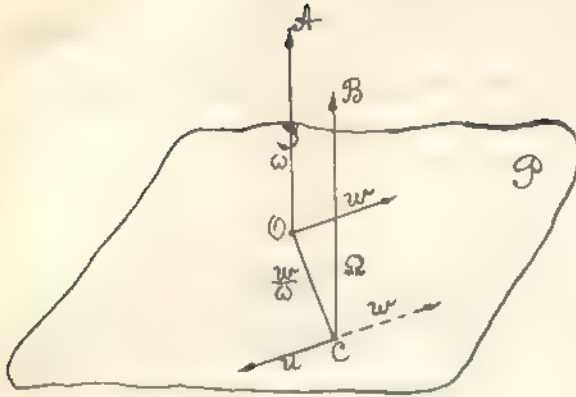
положенный по этому направленію, видѣлъ вращеніе происходящее слева направо. Скорость какой-нибудь точки тѣла  $M$ , взятой въ плоскости  $\mathcal{P}$ , въ составномъ движеніи равна геометрической суммѣ ея скоростей  $u$  и  $w$ . Такъ какъ  $\mathcal{P} \perp OA$ , то  $u$  направлена въ плоскости  $\mathcal{P}$  перпендикулярно къ  $MO$  и равна:

$$u = \omega \cdot MO;$$

если изъ точки  $M$  проведемъ линію, равную и параллельную  $w$  и на  $u$  и  $w$  построимъ параллелограммъ, то діагональ этого параллелограмма ( $v$ ), лежащая въ плоскости  $\mathcal{P}$ , и будетъ скорость точки  $M$  въ составномъ движеніи.

Найдемъ въ плоскости  $\mathcal{P}$  такую точку ( $C$ ) тѣла, скорость которой равна нулю (черт. 31).

Ясно, что скорости  $u$  и  $w$  такой точки должны быть равны и направлены по одной прямой въ противоположныя стороны. Для того, чтобы  $u$  была равна  $w$ , должно быть  $OC = \frac{w}{\omega}$  (такъ какъ  $u = \omega \cdot OC$ ); для того, чтобы  $u$  и  $w$  были направлены по одной прямой,  $OC$  должно быть  $\perp w$  (такъ какъ  $u \perp OC$ ); наконецъ, для того, чтобы  $u$  и  $w$  были направлены въ противоположныя стороны,  $OC$  должна быть направлена въ такую сторону, чтобы скорость  $w$  точки  $C$  оставалась вправо для наблюдателя, располо-



Чертеж 31.

женного по  $OC$  и смотрящего на  $OA$ . Построенная такимъ образомъ точка  $C$  и будетъ (мгновеннымъ) центромъ вращения.

Всѣ точки тѣла, лежація на прямой  $CB$ , параллельной оси  $OA$ , будутъ въ составномъ

движеніи тѣла въ данный моментъ въ покой, т.е.  $CB$  будетъ (мгновенной) осью вращения тѣла.

Опредѣлимъ угловую скорость  $\Omega$ , съ которой тѣло въ составномъ движеніи вращается вокругъ оси  $CB$ .

Возьмемъ точку тѣла  $O$ . Скорость этой точки въ составномъ движеніи тѣла равна  $w$ , такъ какъ ея скорость  $u$  равна нулю. При вращеніи тѣла вокругъ оси  $CB$  скорость точки  $O$  равна  $\Omega \cdot OC$ , потому

$$\Omega \cdot OC = w,$$

откуда

$$\Omega = \frac{w}{OC};$$

а такъ какъ

$$OC = \frac{w}{\omega},$$

то

$$\Omega = \omega.$$

Следовательно, рассматриваемое составное движеніе тѣла есть вращеніе тѣла вокругъ оси  $BC$  съ той же угловой скоростью  $\omega$ , какъ и составляющее вращеніе вокругъ оси  $OA$ .

Изъ предидущаго мы можемъ обратнo сдѣлать слѣдующее заключеніе: вращеніе тѣла вокругъ нѣкоторой оси можно всегда замѣ-

нить вращеніемъ вокругъ другой оси, ей параллельной, съ той же угловой скоростью, присоединяя къ этому вращенію движеніе поступательное съ той скоростью, какую имѣетъ какая-либо точка новой оси.

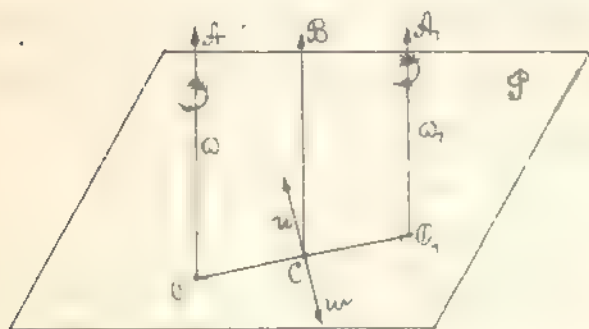
#### § 4. Сложеніе вращеній вокругъ параллельныхъ осей.

Составное движеніе тѣла въ данномъ случаѣ будетъ движеніе, параллельное неподвижной плоскости, перпендикулярной къ направленію осей.

Первый случай: два составляющія вращенія тѣла происходятъ съ одну и ту же сторону.

Пусть угловая скорость переноснаго вращательнаго движенія тѣла вокругъ оси  $CA$  будетъ  $\omega$ , относительнаго вокругъ оси

$CA_1, \dots, \omega_1$  (черт. 32). Въ плоскости  $P$ , перпендикулярной къ  $CA$  и  $CA_1$ , долженъ существовать (мгновенный) центръ  $C$ . Скорость точки  $C$  въ составномъ движеніи равна нулю, но, какъ абсолютная скорость всякой точки, она равна геометри-



Чертежъ 32.

ческой суммѣ двухъ скоростей  $w$  и  $u$ , соответствующихъ вращеніямъ вокругъ осей  $CA$  и  $CA_1$ ; поэтому скорости  $w$  и  $u$  точки  $C$  должны быть равны и направлены по одной прямой въ противоположныя стороны.

Точка, удовлетворяющая этимъ условіямъ, находится на прямой  $CC_1$ , между точками  $C$  и  $C_1$ , причемъ разстоянія ея  $CC_1$  и  $CC_1$  должны быть таковы, чтобы

$$w = w_1,$$

но

$$w = \omega_1 \cdot CO_1, \quad w = \omega \cdot CO;$$

слѣдовательно,

$$\omega_1 CO_1 = \omega \cdot CO$$

откуда

$$\frac{CO_1}{CO} = \frac{\omega}{\omega_1}.$$

Такимъ образомъ, находимъ, что точка  $C$  дѣлитъ прямую  $OO_1$  на части, обратно пропорціональныя угловымъ скоростямъ составляющихъ вращеній.

Прямая  $CB$ , параллельная  $CA$  и  $C_1A_1$ , будетъ осью составнаго вращенія; слѣдовательно, отъ сложенія вращенія вокругъ двухъ параллельныхъ осей въ одну и ту же сторону получается вращеніе въ ту же сторону вокругъ оси, имъ параллельной, причемъ центръ вращенія дѣлитъ прямую, соединяющую центры данныхъ вращеній, на части обратно-пропорціональныя угловымъ скоростямъ этихъ вращеній.

Поскажемъ, что въ данномъ случаѣ угловая скорость  $\Omega$  составнаго движенія равна суммѣ угловыхъ скоростей составляющихъ движеній.

Точка  $O_1$  въ относительномъ движеніи имѣетъ скорость  $u$  равную нулю; поэтому скорость этой точки въ составномъ движеніи равна переносной ея скорости  $w$ .

$$w = \omega \cdot OO_1.$$

При вращеніи же вокругъ оси  $CB$  въ составномъ движеніи скорость точки  $O_1$  равна  $\Omega \cdot CO_1$ ; слѣдовательно:

$$\omega \cdot OO_1 = \Omega \cdot CO_1$$

или

$$\omega(CO + CO_1) = \Omega \cdot CO_1;$$

принявъ во вниманіе выше выведенное равенство

$$\omega \cdot CO = \omega_1 \cdot CO_1,$$

получаемъ

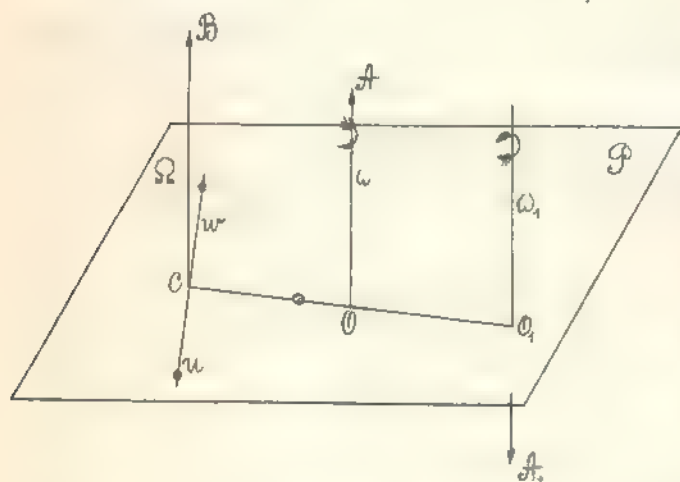
$$\omega_1 CO_1 + \omega \cdot CO = \Omega \cdot CO_1 ;$$

откуда

$$\omega_1 + \omega = \Omega .$$

*Примѣчаніе.* Отмѣтимъ полную аналогію полученнаго вывода съ результатомъ сложенія двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ одну сторону.

Второй случай: два составляющія вращенія происходятъ въ равныя стороны съ различными угловыми скоростями (черт. 32).



Чертежъ 33.

Положимъ  $\omega > \omega_1$ ,

Плоскость  $P$  перпендикулярна къ  $OA$  и  $O_1A_1$ . Найдемъ въ плоскости  $P$  точку  $C$  (мигновенный центръ), скорость которой въ составномъ движеніи равна нулю.

Очевидно, скорости

этой точки въ состав-

ляющихъ движеніяхъ  $w$  и  $w_1$  должны быть направлены по одной прямой въ противоположныя стороны и равны между собой. Поэтому точка  $C$  должна лежать на линіи  $OO_1$  съ внешней стороны точекъ  $O$  и  $O_1$ , ближе къ той оси, вокругъ которой угловая скорость вращенія больше. Скорости точки  $C$  при вращеніи вокругъ осей  $CA$  и  $O_1A_1$  будутъ соответственно:

$$w = \omega \cdot CO,$$

$$w = \omega_1 \cdot CO_1 ;$$

слѣдовательно,



$$\omega \cdot CO = \omega_1 CO_1;$$

откуда

$$\frac{CO}{CO_1} = \frac{\omega}{\omega_1} ;$$

Такимъ образомъ, получимъ: мгновенный центръ лежитъ на прямой, соединяющей центры данныхъ вращеній съ внешней стороны ближе къ оси, для которой угловая скорость вращенія больше, и разстоянія мгновеннаго центра до центровъ данныхъ вращеній обратно пропорціональны соответственнымъ угловымъ скоростямъ. Линія  $CB$ , параллельная  $CA$  и  $C_1A_1$ , будетъ осью составнаго вращенія.

Угловая скорость  $\Omega$  вокругъ оси  $CB$  равна разности угловыхъ скоростей составляющихъ движеній.

Дѣйствительно, скорость точки  $C_1$  въ составномъ движеніи должна быть равна

$$w = \omega CO_1,$$

такъ какъ для нея

$$u = 0 ;$$

при вращеніи же вокругъ оси  $CB$  скорость точки  $C_1$  будетъ равна  $\Omega CO_1$ ; слѣдовательно:

$$\Omega \cdot CO_1 = \omega \cdot CO_1 ;$$

вмѣсто  $CO_1$ , подставимъ  $(CO_1 - CO)$ , тогда

$$\Omega \cdot CO_1 = \omega CO_1 - \omega CO,$$

но

$$\omega \cdot CO = \omega_1 CO_1 ;$$

Поэтому

$$\Omega \cdot CO_1 = \omega \cdot CO_1 - \omega_1 CO_1$$

откуда

$$\Omega = \omega - \omega_1$$

**Примѣчаніе.** Отмѣтимъ и здѣсь полную аналогію полученнаго

вывода съ результатомъ сложения двухъ параллельныхъ силъ, направленныхъ въ разныя стороны.

Третій случай: вращенія происходятъ въ разныя стороны съ равными угловыми скоростями.

Примѣняя къ данному случаю результаты, выведенные для случая неравныхъ угловыхъ скоростей, получимъ, что въ данномъ случаѣ угловая скорость составного движенія равна нулю, а соответствующая ось вращенія находится въ безконечности. Покажемъ, что составное движеніе тѣла будетъ движеніе поступательное.

Возьмемъ точку  $B$  на прямой  $OO_1$  (черт. 34). Скорость точки  $B$  при вращеніи вокругъ оси  $O_1A_1$  будетъ:

$$u = \omega \cdot BO_1,$$

при вращеніи вокругъ оси  $OA$  будетъ:

$$w = \omega \cdot BO$$

Такъ какъ  $u$  и  $w$  направлены по прямой, перпендикулярной къ  $OO_1$ , въ одну сторону, то составная скорость  $v$  точки  $B$  будетъ перпендикулярна къ  $OO_1$  и равна суммѣ скоростей  $u$  и  $w$ .

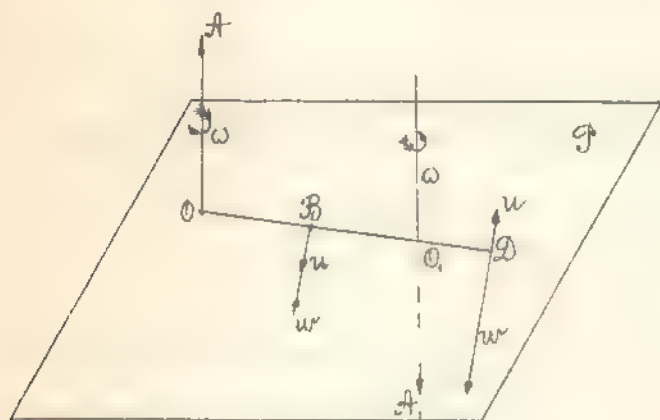
$$v = \omega(BO_1 + BO) = \omega \cdot OO_1.$$

Возьмемъ на прямой  $OO_1$  другую точку  $D$ . Скорость ея при вращеніи вокругъ оси  $O_1A_1$  будетъ:

$$u = \omega \cdot O_1D,$$

при вращеніи вокругъ оси  $OA$  будетъ:

$$w = \omega \cdot OD,$$



чертежъ 34.

но скорости  $u$  и  $u'$  точки  $D$  направлены по прямой, перпендикулярной къ  $OC_1$  въ разныя стороны; поэтому

$$v = u' - u = \omega(O'D - OD) = \omega \cdot OC_1.$$

Видимъ, что скорости двухъ точекъ тѣла  $S$  и  $Q$  въ плоскости  $P$  равны по величинѣ и направленію; отсюда заключаемъ, что въ рассматриваемомъ случаѣ тѣло движется поступательно по направленію, перпендикулярному къ плоскости, заключающей оси данныхъ вращеній, причемъ скорость поступательнаго движенія равняется произведенію величины угловой скорости на крайшнее разстояніе между осями.

**Примѣчаніе.** Этотъ случай вполне аналогиченъ парѣ параллельныхъ силъ; поэтому его иногда называютъ "парой вращенія".

Полученные выводы относительно сложенія вращеній вокругъ двухъ параллельныхъ осей легко распространяются на случай сложенія сколькихъ-либо вращеній вокругъ параллельныхъ осей.

## § 5. СЛОЖЕНІЕ ВРАЩЕНІЙ ВОКРУГЪ ОСЕЙ, ПЕРЕСѢКАЮЩИХСЯ ВЪ ОДНОЙ ТОЧКѢ.

Пусть тѣло вращается вокругъ нѣкоторой оси  $KL$  и затѣмъ участвуетъ въ переносномъ вращательномъ движеніи вокругъ оси  $MX$ , которая въ точкѣ  $C$  пересѣкаетъ ось  $KL$  (черт. 35).

Даны угловыя скорости тѣла:

$$\begin{array}{ll} \text{вокругъ оси } KL & \dots\dots\dots \omega_1; \\ \text{" " } MX & \dots\dots\dots \omega. \end{array}$$

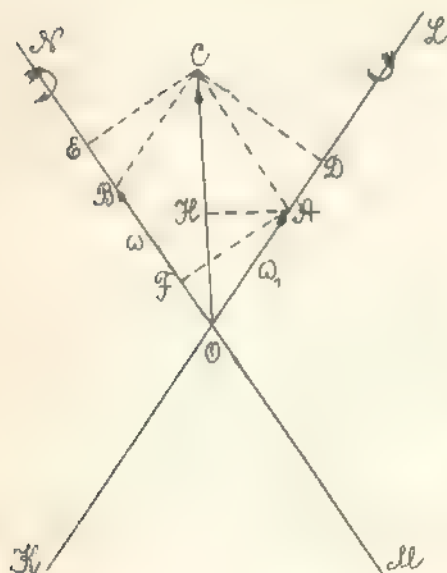
Эти угловыя скорости изобразимъ нѣкоторыми отрѣзками и отложимъ ихъ по соотвѣственнымъ осямъ отъ точки  $O$  въ такую сторону, чтобы для наблюдателя, расположеннаго по этому на-

правленію, соответствующее вращеніе тѣла происходило слѣва направо; пусть

$$\omega_1 = OA$$

$$\omega = OB$$

Такъ какъ въ обоихъ составляющихъ движеніяхъ точка  $O$  неподвижна, то составное движеніе будетъ вращеніе вокругъ неподвижной точки  $O$ , и, слѣдовательно, въ составномъ движеніи тѣла существуетъ мгновенная ось.



Найдемъ направленіе этой оси. Построимъ на угловыхъ скоростяхъ  $\omega$  и  $\omega_1$  параллелограммъ  $OACB$ . Докажемъ, что скорость точки  $C$  въ составномъ движеніи равна нулю. Опустимъ изъ точки  $C$  на ось  $KL$  и

Чертежъ 35.

$MN$  перпендикуляры  $CD$  и  $CE$ . Скорость точки  $C$  при вращеніи вокругъ оси  $KL$  будетъ:

$$v = \omega_1 \cdot CD;$$

при вращеніи вокругъ оси  $MN$  будетъ:

$$w = \omega \cdot CE.$$

Замѣчаемъ, что

$$\omega_1 \cdot CD = 2 \Delta OAC,$$

$$\omega \cdot CE = 2 \Delta OBC.$$

Изъ равенства треугольниковъ  $OAC$  и  $OBC$  слѣдуетъ

$$\omega_1 \cdot CD = \omega \cdot CE,$$

$$u = w.$$

Такъ какъ вращеніе тѣла вокругъ осей  $KL$  и  $MN$  происходитъ слѣва направо, то скорости  $u$  и  $w$  точки  $C$  будутъ направлены перпендикулярно къ плоскости чертежа въ противоположныя стороны; поэтому геометрическая сумма равныхъ по величинѣ скоростей  $u$  и  $w$ , представляющая скорость точки  $C$  въ составномъ движеніи, равна нулю.

Очевидно, всѣ точки прямой  $OC$  будутъ имѣть скорости, равныя нулю, поэтому прямая  $OC$  и будетъ осью составнаго вращенія.

Такимъ образомъ находимъ, что ось вращенія, полученная отъ сложенія вращенія вокругъ двухъ пересекающихся осей, направлена по діагонали параллелограмма, построеннаго на угловыхъ скоростяхъ составляющихъ вращеній.

Опредѣлимъ угловую скорость  $\Omega$  составнаго вращенія тѣла вокругъ оси  $OC$ . Для этого удобно взять точку  $A$ , такъ какъ скорость ея въ составномъ движеніи найти весьма просто. Дѣйствительно, скорость точки  $A$  при вращеніи вокругъ оси  $KL$  будетъ:

$$u = 0;$$

а вокругъ оси  $MN$  будетъ:

$$w = \omega AF,$$

гдѣ  $AF$  перпендикулярна къ направленію  $MN$ ; поэтому скорость составнаго движенія ( $v$ ) точки  $A$  равна  $\omega AF$ ; при вращеніи же тѣла вокругъ оси  $OC$  съ угловой скоростью  $\Omega$  скорость точки  $A$  будетъ равна  $\Omega AH$ , гдѣ  $AH$  разстояніе точки  $A$  отъ оси  $OC$  по перпендикуляру къ этой оси; слѣдовательно:

$$\Omega AH = \omega AF;$$



но произведение  $\omega AF$  представляет площадь параллелограмма  $CABF$ , которую можно также выразить произведением  $OC \cdot AH$ ; поэтому имеем:

$$\Omega AH = OC \cdot AH,$$

откуда

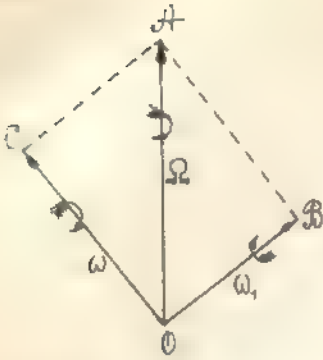
$$\Omega = OC.$$

Такимъ образомъ находимъ, что *угловая скорость составного вращенія, полученная отъ сложения вращеній вокругъ двухъ пересѣкающихся осей, изображается не только по направленію, но и по величинѣ диагональю параллелограмма, построеннаго на угловыхъ скоростяхъ составляющихъ вращеній.*

*Примѣчаніе.* Замѣтимъ, что при сложеніи двухъ силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ, мы имѣли аналогичный результатъ.

*Обратный вопросъ - о разложеніи даннаго вращенія вокругъ неподвижной оси на два составляющихъ вращенія вокругъ осей, пересѣкающихся съ первой осью въ одной точкѣ, рѣшается также аналогично тому, какъ въ статикѣ рѣшался вопросъ о разложеніи данной силы на двѣ составляющія.*

Пусть тѣло вращается вокругъ оси  $CA$  съ угловой скоростью  $\Omega$  (черт. 36). Разложеніе этого вращенія на два составляющихъ вращенія вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку  $O$ , будетъ опредѣленнымъ, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда задана величина и направленіе угловой скорости  $\omega$  одного изъ составляющихъ вращеній; тогда геометрическимъ вычитаніемъ вектора  $\omega$  изъ вектора  $\Omega$  найдемъ величину и направленіе угловой скорости  $\omega_1$  - второго составляющаго вращенія. Въ статикѣ отъ сложения двухъ силъ по правилу параллелограмма мы переходили къ сложенію сколькихъ-угодно силъ, приложенныхъ въ одной точкѣ; также и здѣсь отъ сложения угловыхъ скоростей двухъ вращеній по правилу параллелограмма можемъ перейти къ сложенію



Чертеж 36.

скольких-угодно вращений вокруг осей, проходящих через одну точку; въ результатѣ получимъ слѣдующую теорему: *угловая скорость составного вращенія, полученнаго отъ сложения скольких-угодно вращеній вокруг осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ, по величинѣ и направленію равна*

*геометрической суммѣ угловыхъ ско-*

*ростей составляющихъ вращеній и изображается замыкающей многоугольника, стороны котораго имѣютъ величины и направленія данныхъ угловыхъ скоростей.*

Какъ примѣръ сложения вращеній тѣла вокругъ трехъ осей, рассмотримъ вращеніе тѣла вокругъ неподвижной точки.

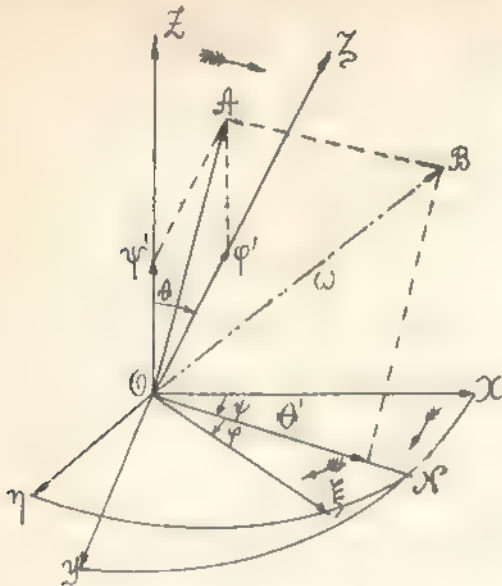
Примемъ эту точку какъ за начало неподвижныхъ координатныхъ осей  $(X, OY, OZ)$ , такъ и за начало подвижныхъ координатныхъ осей  $O\xi, O\eta, O\zeta$ , неизмѣнно связанныхъ съ тѣломъ. (Черт. 37). Направленія подвижныхъ координатныхъ осей опредѣляются по отношенію къ осямъ неподвижнымъ, какъ уже извѣстно, углами  $\varphi, \psi$  и  $\theta$ . При вращеніи тѣла углы  $\varphi, \psi$  и  $\theta$  съ теченіемъ времени измѣняются, а потому:

$$\theta = f_3(t), \psi = f_2(t), \quad \varphi = f_1(t).$$

Дифференцируя эти функціи по  $t$ , получимъ выраженія  $\theta', \psi'$  и  $\varphi'$ , представляющія угловыя скорости вращеній тѣла вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку  $O$  и перпендикулярныхъ къ плоскостямъ  $XOZ, XOY$  и  $\xi O\eta$ , въ которыхъ соотвѣтствующіе углы находятся; такимъ образомъ,  $\theta'$  есть угловая скорость вокругъ оси  $OY$  и направлена по прямой  $OY^*$  въ ту или дру-

\*) Прямая  $OY$ , какъ пересѣченіе плоскостей  $XOY$  и  $\xi O\eta$ , перпендикулярна къ  $OZ$  и  $O\xi$ , а, следовательно, и къ плоскости  $XOZ$ .

гую сторону, смотря по знаку  $\theta'$ ;  $\psi'$  есть угловая скорость вокруг оси  $OZ$  и направлена по  $OZ$  в ту или другую сторону, смотря по знаку  $\psi'$ ;  $\varphi'$  есть угловая скорость вокруг оси  $Ox$  и направлена по  $Ox$  в ту или другую сторону, смотря по знаку  $\varphi'$ .



Чертеж 27.

Складывая три вращения тела вокруг осей  $OX$ ,  $OZ$  и  $OY$ , получим составное вращение вокруг точки  $O$  с угловой скоростью  $\omega$ , которая равна геометрической сумме скоростей  $\theta'$ ,  $\psi'$  и  $\varphi'$ :

$$\bar{\omega} = \bar{\varphi}' + \bar{\psi}' + \bar{\theta}'.$$

Отсюда слѣдуетъ, что проекція угловой скорости  $\omega$  на какую-либо ось равна алгебраической суммѣ проекцій на эту ось угловыхъ скоростей  $\varphi'$ ,  $\psi'$  и  $\theta'$ , направленія которыхъ выше указаны.

Чтобы получить угловую скорость  $\omega$ , сначала сложимъ по правилу параллелограмма угловыя скорости  $\varphi'$  и  $\psi'$ , а затѣмъ полученную угловую скорость  $OA$  сложимъ съ угловою скоростью  $\theta'$ , - найдемъ:

$$\omega = OB. *)$$

Угловая скорость  $OA$  по величинѣ будетъ равна

\*) На чертежѣ направленія угловыхъ скоростей взяты такія, которые соответствуютъ положительнымъ значеніямъ производныхъ:  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\theta'$ .

$$OA = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + 2\varphi'\psi'\cos\theta},$$

а такъ какъ угловая скорость  $\theta$  перпендикулярна къ  $OA$ , то угловая скорость  $\omega$  вращения тѣла вокругъ неподвижной точки по величинѣ равна:

$$\omega = \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2 + \theta^2 + 2\varphi'\psi'\cos\theta}.$$

Найдемъ выраженія для проекцій:  $p$ ,  $q$ ,  $r$  угловой скорости на оси  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $Oz$ , связаннаго съ тѣломъ, черезъ углы  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  и ихъ первыя производныя по времени  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\theta'$ .

Пусть  $OP$  (черт. 38) будетъ прямая пересѣченія плоскости

$\xi Oz$  съ плоскостью

$\xi O\eta$ ; эта прямая со-

ставляетъ прямые углы,

какъ съ осью  $Oz$ , такъ

и съ прямой  $OX$ . Угло-

вую скорость  $\psi'$  во-

кругъ оси  $O\xi$  разло-

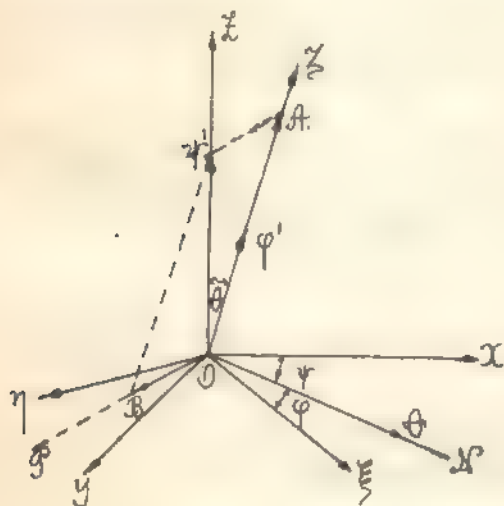
жимъ на двѣ:  $OA$  по

оси  $Oz$  и  $OB$  по

прямой  $OP$ ; получимъ:

$$OA = \psi' \cos\theta,$$

$$OB = \psi' \sin\theta.$$



Чертежъ 38.

Тогда угловая скорость тѣла будетъ разложена на три угловыя скорости:

$$\text{по оси } Oz \dots \dots \dots \psi' \cos\theta + \varphi',$$

$$\text{по оси } OX \dots \dots \dots \theta',$$

$$\text{по оси } OP \dots \dots \dots \psi' \sin\theta.$$

Веремъ сумми проекцій этихъ составляющихъ угловыхъ скоростей на оси  $O\xi$ ,  $O\eta$ ,  $Oz$ . Такъ какъ

$$\angle H\xi = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

$$\angle O\eta = \varphi,$$

$$\angle HZ = \frac{\pi}{2},$$

$$\angle HO\xi = \varphi,$$

$$\angle HO\eta = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

$$\angle HOZ = \frac{\pi}{2}.$$

ТО МЫ НАХОДИМЪ:

$$p = \psi' \sin\theta \sin\varphi + \theta' \cos\varphi,$$

$$q = \psi' \sin\theta \cos\varphi - \theta' \sin\varphi,$$

$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

----- II -----



К И Н Е Т И К А .

( Д И Н А М И К А ) .

ПРИНЦИПЫ Кинематики изложены в первой части Курса Теоретической Механики (стр. 164 - 170, 1914 г.).

Там же (на странице 170) формулированы две главные задачи Кинематики точки:

I. Дано движение материальной точки; требуется определить силу, под влиянием которой это движение совершается.

II. Дана сила, приложенная к материальной точке; требуется определить движение, которое под влиянием этой силы точка совершает.

Первая задача решается легко: (способы ее решения указаны на стр. 170 - 178 первой части). Решение второй задачи, вообще говоря, несравненно труднее.

Рассмотрим эту задачу прежде всего в случае прямолинейного движения.

## КНИЖКА ТОЧКИ.

### ГЛАВА I.

#### ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНІЕ.

Матеріальная точка совершаетъ прямолинейное движеніе тогда, и только тогда, когда сила, къ ней приложенная (или равнодѣйствующая сила, если ихъ нѣсколько), во все время движенія направлена по одной прямой, по которой направлена скорость точки въ одинъ какой-либо моментъ времени.

Въ самомъ дѣлѣ, если точка движется прямолинейно, то скорость ея въ каждый моментъ направлена по одной и той же прямой, а, слѣдовательно, по той прямой, по которой направлена скорость точки въ одинъ какой-либо моментъ; по той же прямой, очевидно, направлено и ускореніе, а, слѣдовательно, сила должна быть направлена все время по той же прямой.

Прямую, по которой точка движется, принимаемъ за ось  $Ox$ ;

Въ нашей задачѣ дана сила, значитъ задана ея проекція  $X^*)$  въ видѣ одного изъ слѣдующихъ выраженій:

$$P(\text{const.}), f(t), f(x), f(x'), f(t, x), f(t, x'), f(x, x'), f(t, x, x');$$

---

\*)  $X$  представляетъ величину силы, взятую со знакомъ  $+$  тогда, когда сила направлена въ положительную сторону оси  $Ox$ , и со знакомъ  $-$ , когда сила направлена въ отрицательную сторону оси  $Ox$ .

требуется найти координату  $x$  точки, какъ функцию времени.

Первый случай. Данная сила имѣетъ постоянную величину:

$$X = P(\text{пост}).$$

Важнѣйшій изъ случаевъ этого рода представляетъ сила тяжести:  $X = mg$ , если положительная ось  $X$  направлена по вертикали внизъ, и  $X = -mg$ , если эта ось направлена по вертикали вверхъ.

Второй принципъ кинетики даетъ намъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{P}{m},$$

■■■

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{P}{m},$$

откуда

$$dx = \frac{P}{m} dt = d\left(\frac{P}{m} t\right);$$

и

$$x' = \frac{P}{m} t + C \quad (1)$$

гдѣ  $C$  постоянная произвольная. Значеніе  $C$  будетъ опредѣленнымъ, когда, кромѣ силы, намъ задается скорость точки въ какой-либо моментъ: если дано, что въ моментъ  $t = t_0$ , скорость

$$x' = x'_0 = \alpha,$$

то въ силу уравненія (1):

$$\alpha = \frac{P}{m} t_0 + C,$$

откуда

$$C = \alpha - \frac{P}{m} t_0.$$

Моментъ  $t_0$  называется начальнымъ моментомъ, а  $x'_0$  называется начальною скоростью точки.

Очень часто полагаютъ, что начальный моментъ  $t_0 = 0$ ; тог-

да въ нашемъ случаѣ:

$$C = \alpha.$$

Уравненіе (1) представляетъ *первый интегралъ задачи*: онъ выражаетъ скорость точки черезъ время и даетъ намъ возможность опредѣлять, когда скорость точки будетъ равна нулю, и, слѣдовательно, когда можетъ измѣниться направленіе движенія.

На основаніи уравненія (1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{m} \cdot t + C.$$

(C здѣсь уже величина извѣстная)

$$dx = \left( \frac{g}{m} \cdot t + C \right) dt;$$

откуда

$$x = \frac{g}{2m} \cdot t^2 + Ct + D \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ D ~ *вторая произвольная постоянная*; значеніе D будетъ опредѣленнымъ, когда для начального момента  $t = t_0$  задано соответственное положеніе точки:  $x_0 = a$ ; это положеніе называется *начальнымъ положеніемъ точки*.

На основаніи уравненія (2):

$$a = \frac{g}{m} \cdot t_0^2 + Ct_0 + D;$$

откуда

$$D = a - \frac{g}{2m} \cdot t_0^2 - Ct_0.$$

Когда  $t_0 = 0$ , постоянная  $D = a$ .

Уравненіе (2) называется *вторымъ интеграломъ задачи*.

Въ упомянутомъ выше случаѣ *силы тяжести*, когда  $X = mg$ , при  $t_0 = 0$  первый и второй интегралы будутъ:

$$\begin{aligned} x' &= gt + \alpha, \\ x &= \frac{gt^2}{2} + \alpha t + a. \end{aligned}$$



*Примѣчаніе.* Если сила постоянная по величинѣ, но измѣняетъ свое направленіе во время движенія, тогда мы разбиваемъ движеніе на такія части, чтобы въ каждой части сила сохраняла постоянное направленіе, и опредѣляемъ указаннымъ способомъ движеніе точки въ каждой части отдѣльно.

Второй случай. Сила задана, какъ функція времени  $t$  :

$$X = f(t).$$

Важный случай такой силы представляетъ сила, измѣняющаяся періодически съ теченіемъ времени, напримѣръ,

$$X = h \cdot \cos pt.$$

Имѣемъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} \cdot f(t).$$

откуда найдемъ первый интегралъ задачи:

$$x' = \frac{1}{m} \int f(t) dt + C. \quad \dots \dots \dots (3)$$

Постоянную произвольную  $C$  мы опредѣлимъ, зная начальную скорость точки,  $x'_0 = \alpha$ . Для краткости обозначимъ:

$$\int f(t) dt = F(t);$$

тогда

$$\alpha = \frac{1}{m} \cdot F(t_0) + C;$$

откуда

$$C = \alpha - \frac{1}{m} \cdot F(t_0).$$

Уравненіе (3) даетъ намъ возможность рѣшать различно вопросы относительно скорости точки.

Изъ уравненія (3) имѣемъ:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \cdot F(t) + C;$$

(значение  $C$  считаемъ уже опредѣленнымъ).

Находимъ второй интегралъ задачи.

$$x = \frac{1}{m} \int F(t) dt + Ct + D. \quad (4)$$

Вторую постоянную произвольную мы опредѣлимъ, зная начальное положеніе точки,  $x_0 = a$

Обозначимъ:

$$\int F(t) dt = \varphi(t);$$

получимъ на основаніи уравненія (4):

$$a = \frac{1}{m} \varphi(t_0) + Ct_0 + D;$$

откуда

$$D = a - \frac{1}{m} \varphi(t_0) - Ct_0.$$

Въ вышеуказанномъ частномъ случаѣ, когда

$$X = h \cdot \cos pt,$$

имѣемъ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{h}{m} \cos pt,$$

$$x' = \frac{h}{mp} \sin pt + C,$$

$$x = -\frac{h}{m p^2} \cos pt + Ct + D.$$

Третій случай. Сила, приложенная къ точкѣ, дана, какъ функція разстоянія движущейся точки отъ начала координатъ:

$$X = f(x).$$

Важѣйшій случай такой силы представляетъ сила притяженія къ неподвижному центру, а также сила отталкиванія отъ неподвижнаго центра; такъ, напримѣръ: сила притяженія по закону

Ньютона равна  $\left(\frac{k^2 m}{x^2}\right)$ , если  $m$  масса притягиваемой точки и начало координат помещено въ притягивающемъ центрѣ,  $k^2$  - постоянная величина; сила заставляющая колебаться частицу упругаго тѣла, есть сила притяженія, равная  $(k^2 m x)$ , если начало координатъ помещено въ среднемъ положеніи частицы, и т.д.

Имѣемъ:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x).$$

или

$$m \frac{dx'}{dt} = f(x).$$

Помножимъ правую часть этого уравненія на  $dx$ , а лѣвую на равное ему произведение  $x' dt$ ; тогда получимъ:

$$m x' \frac{dx'}{dt} dt = f(x) dx;$$

или

$$m x' dx = f(x) dx;$$

откуда

$$d \frac{m x'^2}{2} = f(x) dx,$$

и первый интегралъ задачи будетъ:

$$\frac{m x'^2}{2} = \int f(x) dx + C. \quad (5).$$

Положимъ:

$$\int f(x) dx = F(x).$$

тогда первый интегралъ задачи представится въ видѣ:

$$\frac{m x'^2}{2} = F(x) + C. \quad (5_1)$$

Постоянную произвольную  $C$  опредѣлимъ съ помощью начального положенія  $x_0 = a$  и начальной скорости  $x'_0 = \alpha$ .

Изъ уравненія  $(5_1)$  слѣдуетъ:

$$\frac{m\alpha^2}{2} = F(a) + C;$$

откуда

$$C = \frac{m\alpha^2}{2} - F(a).$$

Уравнение (5<sub>1</sub>) дает нам возможность решать различные вопросы относительно скорости точки; из этого уравнения получаем:

$$x' = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [F(x) + C]}. \quad (5_2)$$

Знакъ передъ радикаломъ опредѣляется направлениемъ начальной скорости, именно, долженъ быть взятъ тотъ знакъ, который имѣетъ

$$x'_0 = \alpha \quad (+, \text{ если } \alpha > 0 \quad ; \quad -, \text{ если } \alpha < 0),$$

потому что, какая бы сила на точку ни дѣйствовала, точка всегда въ первое время послѣ начала движенія будетъ двигаться въ сторону начальной скорости; если же начальная скорость точки равна нулю ( $\alpha = 0$ ), то знакъ передъ радикаломъ опредѣляется направлениемъ силы въ начальный моментъ, потому что, если начальная скорость равна нулю, то точка будетъ двигаться по направлению силы, слѣдовательно, надо взять +, когда сила въ начальный моментъ направлена въ положительную сторону оси  $Ox$  [ $f(x_0) > 0$ ], и -, когда сила направлена въ отрицательную сторону [ $f(x_0) < 0$ ], если же и  $f(x_0) = 0$ , то точка останется въ покоѣ.

Изъ уравненія (5<sub>2</sub>):

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [F(x) + C]}.$$

откуда

\*) Въ общемъ изслѣдованіи мы будемъ писать передъ радикаломъ два знака. въ каждомъ частномъ случаѣ удерживаемъ одинъ, руководствуясь при выборѣ указанными соображеніями.

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}[F(x)+C]}} = dt.$$

Второй интеграль задачи будетъ:

$$\int \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}[F(x)+C]}} = t + D, \dots \dots (6)$$

гдѣ  $D$  постоянная произвольная.

Положимъ:

$$\int \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}[F(x)+C]}} = \varphi(x),$$

тогда второй интеграль представится въ такомъ видѣ:

$$\varphi(x) = t + D, \dots \dots (6_1)$$

гдѣ

$$D = \varphi(a) - t_0. *)$$

Какъ примѣръ, рассмотримъ прямолинейное движеніе точки, на которую дѣйствуетъ сила притяженія къ неподвижному центру, пропорціональная разстоянію.

Дано:

$$X = -k^2 m x, t_0 = 0, x_0 = a, x'_0 = \alpha.$$

$k^2$  есть величина силы притяженія на единицу массы, находящейся на разстояніи равномъ единицѣ отъ притягивающаго центра.

Уравненіе движенія по сокращеніи на  $m$  будетъ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x;$$

\*) Приемъ, которымъ мы воспользовались для интегрированія уравненія движенія въ III случаѣ, можно примѣнять всякій разъ, когда имѣемъ дифференціальное уравненіе вида:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \Phi(u),$$

какія бы переменныя величины не обозначались буквами  $u$  и  $t$ .

откуда:

$$d\frac{x^2}{2} = -k^2 x dx.$$

Первый интеграль:

$$\frac{x'^2}{2} = -k^2 \frac{x^2}{2} + C. \dots\dots\dots (5)$$

Подставляя въ это уравненіе значеніе постоянной произволь-  
ной

$$C = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{k^2 \alpha^2}{2},$$

получимъ:

$$x'^2 = -k^2 x^2 + k^2 \alpha^2 + \alpha^2,$$

или

$$x'^2 = k^2 \left( \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{k^2} - x^2 \right).$$

Для сокращенія письма положимъ:

$$\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{k^2} = q^2,$$

тогда

$$x'^2 = k^2 (q^2 - x^2),$$

■

$$x' = \pm k \sqrt{q^2 - x^2}. \dots\dots\dots (5')$$

Начальное значеніе  $x_0 = \alpha$  мы можемъ всегда считать поло-  
жительнымъ, потому что выборъ направленія оси  $OX$  зависитъ  
отъ насъ, но начальная скорость  $\alpha$  можетъ быть положительной,  
отрицательной и равною нулю.

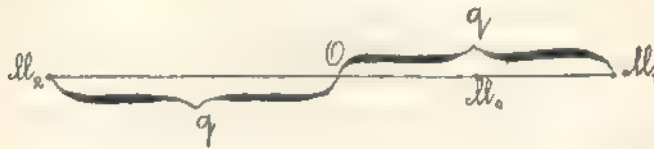
Въ уравненіи (5') передъ радикаломъ возьмемъ знакъ плюсъ  
(+), когда  $\alpha > 0$ , и минусъ (-), когда  $\alpha < 0$ ; когда же  $\alpha = 0$ ,  
то надо взять -, потому что точка будетъ двигаться къ притя-  
гивающему центру.



Скорость точки — величина вещественная, следовательно, разность  $q^2 - x^2$  не может быть отрицательной, т.е. необходимо, чтобы во все время движения было

$$x^2 \leq q^2 \quad \text{или} \quad |x| \leq q.$$

Отсюда заключаем, что точка при своем движении не может удаляться от начала координат на расстояние, большее  $q$ .



Чертеж 89 .

Въ положеніяхъ, гдѣ  $|x| = q$ , точка имѣетъ скорость, равную нулю, и измѣняетъ направленіе движенія. Наибольшую скорость точка имѣетъ тогда, когда  $x = 0$ , т.е. въ среднемъ положеніи.

Изъ уравненія (5<sub>2</sub><sup>1</sup>) можно найти скорость точки для всякаго  $x$ .

1. Когда  $\alpha > 0$ , въ уравненіи (5<sub>2</sub><sup>1</sup>) радикалъ надо взять со знакомъ + :

$$x' = k \sqrt{q^2 - x^2};$$

откуда:

$$\frac{dx}{\sqrt{q^2 - x^2}} = k dt.$$

Второй интегралъ задачи будетъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{q^2 - x^2}} = kt + C \dots \dots \dots (6')$$

или

$$\arcsin \frac{x}{q} = kt + C \dots \dots \dots (6'')$$

гдѣ

$$D = \arcsin \frac{a}{q},$$

если положить  $t_0 = 0$  ; дуга берется въ первой четверти. Изъ уравненія (6')

$$\frac{x}{q} = \sin(kt + D);$$

откуда

$$x = q \sin(kt + D),$$

или

$$x = q \cdot \sin\left(kt + \arcsin \frac{a}{q}\right) \dots\dots\dots (6'')$$

Движеніе, опредѣляемое этимъ уравненіемъ есть гармоническое колебаніе.

Изъ формулы (6'') слѣдуетъ, что при измѣненіи  $t$  на  $\frac{2\pi}{k}$  или, вообще, на  $\frac{2n\pi}{k}$ ,  $x$  получитъ прежнее значеніе; слѣдовательно, если въ какой-либо моментъ точка находится въ положеніи  $M_1$ , то при измѣненіи  $t$  на  $T = \frac{2\pi}{k}$ , она пройдетъ до положенія  $M_2$  и обратно въ  $M_1$ ; при измѣненіи же  $t$  на  $\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{k}$  точка перейдетъ отъ одного крайняго положенія до другого.

$T = \frac{2\pi}{k}$  — называется продолжительностью полного колебанія или это періодомъ.

$T = \frac{\pi}{k}$  — называется продолжительностью одного размаха,

$q$  — называется амплитудой колебанія.

$T$ , какъ видимъ, зависитъ только отъ величины притяженія единицы массы на единицу разстоянія.

Амплитуда

$$q = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{k^2}}$$

зависитъ, кромѣ того, отъ начальнаго положенія и отъ начальной скорости.

Уравненіе (6'') можно преобразовать

$$x = q \sin kt \cos D + q \cos kt \sin D$$

Мы нашли выше, что

$$\sin D = \frac{a}{q},$$

следовательно:

$$\cos D = \sqrt{\frac{q^2 - a^2}{q^2}}, \quad *)$$

■

$$x = \sqrt{q^2 - a^2} \cdot \sin kt + a \cos kt$$

или

$$x = a \cos kt + \frac{a}{k} \sin kt.$$

2. Если  $\alpha < 0$ , то

$$x' = -k \sqrt{q^2 - x^2}$$

и

$$\frac{dx}{\sqrt{q^2 - x^2}} = -k \cdot dt;$$

откуда

$$\arcsin \frac{x}{q} = -kt + D,$$

где

$$D = \arcsin \frac{a}{q};$$

следовательно:

$$x = q \cdot \sin(-kt + D).$$

Мы получим прежнюю формулу (6"), когда возьмем дугу, равную постоянной  $D$ , во второй четверти, тогда

$$x = q \cdot \sin(-kt + \pi - \arcsin \frac{a}{q});$$

где дуга  $\arcsin \frac{a}{q}$  берется уже в первой четверти:

$$x = q \cdot \sin[\pi - (kt + \arcsin \frac{a}{q})],$$

---

\*) Радикаль брать со знаком плюс.

откуда

$$x = q \cdot \sin(kt + \arcsin \frac{a}{q}) \dots \dots \dots (6')$$

изъ этой формулы получаемъ, какъ и раньше,

$$x = a \cos kt + \frac{a}{k} \cdot \sin kt.$$

Мы видимъ, такимъ образомъ, что въ рассматриваемой задачѣ знакъ + или — передъ радикаломъ въ первомъ интегралѣ не оказываетъ вліянія на видъ второго интеграла.

Когда  $\alpha = 0$ , тогда  $q = a$ ,  $\frac{a}{q} = 1$ , и  $\arcsin \frac{a}{q} = \frac{\pi}{2}$ , по формулѣ (6'') имѣемъ:

$$x = a \sin(kt + \frac{\pi}{2}),$$

или

$$x = a \cos kt.$$

Въ случаѣ, когда на точку дѣйствуетъ сила отталкиванія отъ неподвижнаго центра, пропорціональная разстоянію, дифференціальное уравненіе движенія точки будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = + k^2 x. \dots \dots \dots (7)$$

Для интегрированія этого уравненія такъ же, какъ и уравненія предыдущаго примѣра, кромѣ вышеуказаннаго метода, можно примѣнить методъ частныхъ рѣшеній, такъ какъ уравненія линейныя. Уравненію (7), очевидно, удовлетворяютъ:

$$x = e^{kt} \quad \text{и} \quad x = e^{-kt},$$

гдѣ  $e$  основаніе натуральныхъ логарифмовъ; поэтому общее выраженіе  $x$  будетъ:

$$x = C \cdot e^{kt} + D \cdot e^{-kt}.$$

При начальныхъ данныхъ:

$$t_0 = 0, \quad x_0 = a, \quad x'_0 = \alpha,$$

получимъ:

$$x = \frac{a}{2} \cdot (e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{a}{2k} (e^{kt} - e^{-kt}).$$

Отсюда мы видимъ, что по истеченіи достаточно большого промежутка времени точка будетъ находиться сколь угодно далеко отъ отталкивающаго центра.

Четвертый случай. Сила, приложенная къ точкѣ, дана какъ функция скорости точки:

$$X = f(x').$$

Силы, зависящія отъ скорости, встрѣчаются тогда, когда изслѣдуется движеніе матеріальной точки въ сопротивляющейся средѣ.

Сопротивленіе среды разсматривается, какъ сила, приложенная къ матеріальной точкѣ и направленная противоположно скорости точки; величина этой силы выражается нѣкоторой функцией отъ плотности среды и отъ скорости точки.

Когда плотность среды постоянна, то сопротивленіе являнется въ зависимости только отъ скорости точки, — въ простѣйшихъ случаяхъ оно пропорціонально первой, второй, вообще, цѣлой степени скорости.

На основаніи второго принципа имѣемъ:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x').$$

Существуютъ два пути для полученія интеграловъ этого уравненія.

1. Такъ какъ

$$m \cdot \frac{dx'}{dt} = f(x'),$$

то

$$m \frac{dx'}{f(x')} = dt.$$

Первый интегралъ задачи будетъ:

$$m \cdot \int \frac{dx'}{f(x')} = t + C. \quad (7').$$

Положимъ:

$$\int \frac{dx'}{f(x')} = \varphi(x'),$$

Тогда

$$\varphi(x') = \frac{1}{m} \cdot (t + C). \quad (7'').$$

Относя уравненіе  $(7'')$  къ начальному моменту, получаемъ:

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{m} (t_0 + C),$$

откуда

$$C = m \cdot \varphi(\alpha) - t_0.$$

Рѣшая уравненіе  $(7'')$  относительно  $x'$ , получимъ  $x'$  какъ извѣстную функцію отъ  $t$ ; пусть

$$x' = F(t). \quad (7''').$$

Это уравненіе позволяетъ намъ рѣшать различные вопросы относительно скорости точки.

Изъ уравненія  $(7''')$  слѣдуетъ:

$$dx = F(t) dt.$$

Отсюда находимъ второй интеграль задачи:

$$x = \int F(t) dt + D; \quad (8)$$

полагая

$$\int F(t) dt = \Phi(t),$$

имѣемъ:

$$x = \Phi(t) + D, \quad (3.)$$

гдѣ

$$D = \alpha - \Phi(t_0).$$

II. Имѣемъ уравненіе:



$$m \cdot \frac{dx'}{dt} = f(x').$$

Правую часть его помножимъ на  $dx$ , лѣвую — на равное произведение  $x'dt$ , какъ въ предыдущемъ случаѣ III:

$$m x' dx' = f(x') dx,$$

откуда

$$\frac{m x' dx'}{f(x')} = dx.$$

Первый интегралъ задачи будетъ:

$$m \int \frac{x' dx'}{f(x')} = x + C_1. \quad (9)$$

Онъ выражаетъ зависимость между скоростью и разстояніемъ.

Положимъ:

$$m \int \frac{x' dx'}{f(x')} = \Phi(x').$$

Тогда

$$m \Phi(x') = x + C_1. \quad (9')$$

Рѣшая это уравненіе относительно  $x'$ , выразимъ  $x'$  какъ известную функцію отъ  $x$ ; пусть будетъ:

$$x' = \pi(x);$$

тогда

$$\frac{dx}{dt} = \pi(x);$$

откуда

$$\frac{dx}{\pi(x)} = dt;$$

слѣдовательно, второй интегралъ задачи будетъ:

$$\int \frac{dx}{\pi(x)} = t + C_2, \quad (10)$$

полагая

$$\int \frac{dx}{\pi(x)} = \psi(x),$$

имѣемъ

$$\begin{aligned}\psi(x) &= t_1 + \mathcal{Q}_1, \\ \mathcal{Q}_1 &= \psi(a) - t_1.\end{aligned}$$

При рѣшеніи задачъ въ случаѣ IV можно примѣнить оба изложенные способа, выбирая, конечно, тотъ, который даетъ болѣе простое рѣшеніе.

Можетъ, однако, случиться, что ни одного изъ уравненій  $(7')$  и  $(9')$  мы не сумѣемъ рѣшить относительно  $x'$ ; тогда совокупность этихъ двухъ уравненій можно разсматривать, какъ полное рѣшеніе задачи.

Къ случаю IV относятся задачи о движеніи тяжелой точки въ *сопротивляющейся средѣ*.

Если сопротивленіе среды пропорціонально *первой* степени скорости, то при восходящемъ и нисходящемъ движеніи *тяжелой* точки, когда вертикальная ось  $Ox$  направлена внизъ, мы будемъ имѣть:

$$X = mg - n \cdot m x';$$

если сопротивленіе среды пропорціонально *квадрату* скорости, то при паденіи точки:

$$X = mg - n \cdot m x'^2,$$

а при восходящемъ движеніи точки:

$$X = mg + n \cdot m x'^2;$$

вообще, если сопротивленіе среды пропорціонально *степени  $\nu$*  скорости, гдѣ  $\nu$  число цѣлое, то въ дифференціальномъ уравненіи движенія соотвѣствующій членъ будетъ:

$$\text{при } \nu \text{ нечетномъ} \dots\dots\dots - n \cdot m \cdot x'^\nu;$$

$$\text{а при } \nu \text{ четномъ} \dots\dots\dots + n \cdot m \cdot x'^\nu, \quad \text{если } x' > 0$$

и при  $p$  четном  $\dots + n m x'^p$ , если  $x' < 0$ , такъ какъ сила сопротивленія всегда имѣетъ направленіе, противоположное скорости точки.

Какъ примѣръ, рассмотримъ движеніе тяжелой матеріальной точки въ однородной средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально первой степени скорости.

Вертикальную ось  $Ox$  направимъ внизъ.

Дано:

$$X = mg - n m x', \quad t_0 = 0, \quad x_0 = \alpha, \quad x'_0 = \alpha;$$

$\alpha > 0$  или  $\alpha < 0$ , смотря по тому, какъ направлена начальная скорость, вверхъ или внизъ.

Дифференціальное уравненіе движенія, по сокращеніи на  $m$ , будетъ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = g - n x';$$

откуда

$$\frac{dx'}{g - n x'} = dt.$$

Интегрируя, получимъ:

$$-\frac{1}{n} \cdot \log(g - n x') = t + C.$$

Подставляя въ это уравненіе значеніе постоянной произвольной

$$C = -\frac{1}{n} \log(g - n \alpha),$$

имѣемъ:

$$t = \frac{1}{n} \cdot \log\left(\frac{g - n \alpha}{g - n x'}\right),$$

откуда

$$\log\left(\frac{g - n \alpha}{g - n x'}\right) = n t,$$

или

$$\frac{g - n \alpha}{g - n x'} = e^{n t};$$

слѣдовательно:

$$q - n\alpha = e^{nt}(q - nx'); \quad ,$$

откуда находимъ первый интегралъ задачи:

$$x' = \frac{q}{n} - \left(\frac{q}{n} - \alpha\right) \cdot e^{-nt}.$$

Интегрируя еще разъ, получимъ второй интегралъ:

$$x = \frac{q}{n} t + \frac{q - n\alpha}{n^2} \cdot e^{-nt} + D,$$

гдѣ

$$D = \alpha - \frac{q - n\alpha}{n^2};$$

и слѣдовательно:

$$x = \alpha + \frac{q}{n} t - \frac{q - n\alpha}{n^2} (1 - e^{-nt}).$$

----- " -----

Легко доказать, что тяжелая точка, брошенная вверхъ въ сопротивляющейся средѣ, каковъ бы ни былъ законъ сопротивленія, поднимается въ теченіе болѣе короткаго промежутка времени и достигаетъ меньшей высоты, чѣмъ въ пустотѣ, при одной и той же начальной скорости  $\alpha$ .

Если вертикальная ось  $OX$  направлена вверхъ, то уравненіе движенія точки въ сопротивляющейся средѣ, по сокращеніи на  $m$  будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - R,$$

гдѣ  $R$  есть нѣкоторая функція скорости, имѣющая положительное значеніе. Интегрируя, получимъ:

$$\int \frac{dx'}{g + R} = t + C$$

Положимъ для краткости:

$$\int \frac{dx'}{q+R} = F(x')$$

тогда:

$$-F(x') = t + C;$$

относя это уравнение къ начальному моменту, когда  $x_0 = 0, x'_0 = \alpha,$   
 $t = 0$ , находимъ:

$$-F(\alpha) = C;$$

слѣдовательно:

$$t = F(x) - F(x')$$

Обозначимъ черезъ  $t_1$  промежутокъ времени отъ начального момента до момента высшаго поднятія точки, когда  $x'_1 = 0$ ; тогда:

$$t_1 = F(\alpha) - F(0),$$

или

$$t_1 = \int_0^{\alpha} \frac{dx'}{q+R}, \dots\dots\dots (11).$$

Время  $T$  поднятія точки вверхъ, когда сопротивленіе среды  $R=0$ , равно

$$T = \int_0^{\alpha} \frac{dx'}{q} \dots\dots\dots (12).$$

Каждый элементъ интеграла (11) меньше соотвѣтственнаго элемента интеграла (12), а такъ какъ суммирование элементовъ происходитъ между одинаковыми предѣлами, то

$$\int_0^{\alpha} \frac{dx'}{q+R} < \int_0^{\alpha} \frac{dx'}{q},$$

слѣдовательно:

$$t_1 < T.$$

Для доказательства втораго предложенія, беремъ интегралъ, выражающій зависимость между  $x'$  и  $x$  :

$$\int \frac{x' dx'}{-g - R} = x + C_1.$$

Обозначимъ:

$$\int \frac{x' dx'}{g + R} = \Phi(x');$$

тогда, подставляя значеніе постоянной произвольной

$$C_1 = -\Phi(\alpha),$$

получимъ:

$$x = \Phi(\alpha) - \Phi(x).$$

Пусть  $h$  обозначаетъ высоту подъема точки; ясно, что  $x$  равно  $h$ , когда  $x' = 0$ ; слѣдовательно:

$$h = \Phi(\alpha) - \Phi(0),$$

или

$$h = \int_0^{\alpha} \frac{x' dx'}{g + R} \dots \dots \dots (13)$$

Высота  $\mathcal{H}$  поднятія точки въ средѣ, сопротивленіе которой  $R=0$ , т.е. въ пустотѣ, равна:

$$\mathcal{H} = \int_0^{\alpha} \frac{x' dx'}{g} \dots \dots \dots (14)$$

Элементы интеграла (13) меньше соответственныхъ элементовъ интеграла (14), а такъ какъ оба интеграла берутся между одними и тѣми же предѣлами, то интегралъ (13) меньше интеграла (14), слѣдовательно

$$h < \mathcal{H}.$$

----- " -----

Для тѣхъ случаевъ прямолинейнаго движенія, когда данная сила зависитъ отъ двухъ или отъ трехъ переменныхъ величинъ:

$$X = f(t, x), X = f(t, x'), X = f(x, x'), X = f(t, x, x'),$$



нельзя указать общих способов рѣшенія, которые всегда давали бы интегралы въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ приходится употреблять тотъ или другой приѣмъ интегрированія въ зависимости отъ вида функціи  $f$ .

1. Какъ примѣръ на тотъ случай, когда сила есть функція отъ разстоянія и скорости, рассмотримъ движеніе точки, притягиваемой къ неподвижному центру силъ, пропорціональномъ разстоянію, принимая во вниманіе сопротивленіе среды, пропорціональное скорости.

Дифференціальное уравненіе движенія, по сокращеніи на  $m$  будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x - 2nx', \dots \dots \dots (15)$$

если постоянный коэффициентъ сопротивленія среды обозначимъ черезъ

$$2mn$$

Введемъ въ уравненіе (15) вмѣсто переменной  $x$  новую переменную  $\xi$  такъ, чтобы для  $\xi$  уравненіе (15) получило видъ, нами уже изученный; положимъ:

$$x = \xi e^{rt};$$

тогда

$$x' = e^{rt}(\xi' + r\xi)$$

и

$$x'' = e^{rt}(\xi'' + 2r\xi' + r^2\xi).$$

Замѣняя въ уравненіи (15)  $x$ ,  $x'$  и  $x''$ , полученными для нихъ выраженіями, находимъ, по раздѣленіи на  $e^{rt}$ :

$$\xi'' + 2r\xi' + r^2\xi = -k^2\xi - 2n\xi' - 2nr\xi \dots \dots (16)$$

Положимъ:

$$r = -n;$$

тогда уравнение (16) приметъ извѣстный уже видъ:

$$\xi'' = -(k^2 - n^2)\xi. \dots \dots \dots (17).$$

При этомъ могутъ представиться три случая: 1)  $k^2 > n^2$ ,  
2)  $k^2 = n^2$ , 3)  $k^2 < n^2$ .

Разберемъ подробно первый случай, какъ болѣе важный, ибо во многихъ случаяхъ движенія сопротивленіе мало.

Обозначимъ:

$$k^2 - n^2 = p^2.$$

Тогда уравнение (17) приметъ видъ:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -p^2 \xi;$$

отсюда, какъ извѣстно, получаемъ:

$$\xi = q \cdot \sin(pt + \delta),$$

гдѣ

$$\delta = \arcsin \frac{\xi_0}{q},$$

$$q = \sqrt{\xi_0^2 + \frac{\xi_1^2}{n^2}};$$

причемъ

$$\xi_0 = x, \quad \xi_1 = x'_0 + nx, \quad \text{если } t_0 = 0.$$

Такимъ образомъ, для рассматриваемаго движенія мы находимъ:

$$x = q \cdot e^{-nt} \cdot \sin(pt + \delta) \dots \dots \dots (18).$$

Уравненіе (18) выражаетъ "затухающее" колебательное движеніе.

Покажемъ, что въ этомъ движеніи продолжительность одного размаха остается постоянной:  $T = \frac{2\pi}{p}$ , величины же размаховъ уменьшаются съ теченіемъ времени въ геометрической прогрессіи,

знаменатель которой:  $e^{-nt}$ .

Дифференцируемъ уравненіе (18):

$$x' = e^{-nt} [q \cdot p \cos(pt + \delta) - n q \sin(pt + \delta)];$$

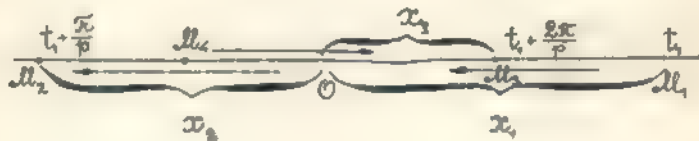
откуда получаемъ уравненіе для опредѣленія тѣхъ моментовъ времени, въ которые скорость точки  $x'$  равна нулю:

$$\tan(pt + \delta) = \frac{p}{n} \dots \dots \dots (19)$$

Ясно, что уравненію (19) удовлетворяетъ цѣлый рядъ значеній  $t$  :  $t_1$ ,  $t_1 + \frac{\pi}{p}$ ,  $t_1 + \frac{2\pi}{p}$  и т.д. слѣдовательно, продолжительность одного размаха  $\mathcal{J}$  равна постоянной величинѣ  $\frac{\pi}{p}$ ; продолжительность полного колебанія будетъ:

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

Чтобы доказать второе положеніе, опредѣлимъ величины перваго размаха точки  $M_1 M_2$  (черт. 39) и второго  $M_2 M_3$ .



Чертежъ 39.

Очевидно:

$$M_1 M_2 = x_1 + |x_2|; \quad M_2 M_3 = |x_2| + x_2.$$

Въ моментъ  $t_1$

$$x_1 = q \cdot e^{-nt_1} \sin(pt_1 + \delta);$$

въ моментъ  $(t_1 + \frac{\pi}{p})$

$$x_2 = -q e^{-nt_1} e^{-\frac{n\pi}{p}} \sin(pt_1 + \delta) = -x_1 e^{-\frac{n\pi}{p}};$$

слѣдовательно

$$M_1 M_2 = x_1 (1 + e^{-\frac{n\pi}{p}}) \dots \dots \dots (20)$$

Далѣе, для момента  $(t_1 + \frac{2\pi}{p})$

$$x_3 = a e^{-nt_1} e^{-\frac{2\pi n}{p}} \sin(pt_1 + \delta) = x e^{-\frac{2n\pi}{p}};$$

поэтому

$$M_2 M_3 = x e^{-\frac{n\pi}{p}} (1 + e^{-\frac{n\pi}{p}}) \dots \dots \dots (21)$$

Сравнивая уравненія (20) и (21) видимъ, что  $M_2 M_3$  отличается отъ  $M_1 M_2$  множителемъ  $e^{-\frac{n\pi}{p}}$  или, такъ какъ  $\frac{n}{p} = \gamma$ , множителемъ  $e^{-n\gamma}$ , причемъ  $e^{-n\gamma} < 1$ :

Далѣе, получимъ:

$$x_4 = -x_3 e^{-n\gamma},$$

слѣдовательно

$$M_3 M_4 = M_2 M_3 e^{-n\gamma},$$

$$x_5 = -x_4 e^{-n\gamma} \dots \dots \dots \text{и т. д.}$$

Такимъ образомъ величины размаховъ при затухающемъ колебательномъ движеніи убываютъ въ геометрической прогрессіи, знаменатель которой есть  $e^{-n\gamma}$ ; если величину размаха перваго послѣ начального момента колебанія обозначимъ черезъ  $A$ , то величины размаховъ слѣдующихъ колебаній будутъ

$$A e^{-n\gamma}, A e^{-2n\gamma}, A e^{-3n\gamma}, A e^{-4n\gamma}, \dots \dots \dots \text{и т. д.}$$

Второй случай:

$$k = n$$

Уравненіе (17) даетъ:

$$\xi'' = 0$$

отсюда

$$\xi = \xi_0 + \xi_1 t$$

а потому

$$x = e^{-nt} \left( \xi_0 + \xi'_0 t \right).$$

Это выражение показываетъ, что по истеченіи достаточно большого промежутка времени точка будетъ сколь угодно близка къ притягивающему центру; при  $t = \infty$ ,  $x = 0$ .

Если начальная скорость точки равна нулю:  $x'_0 = 0$ , мы получимъ:

$$x = x_0 e^{-nt} (1 + nt);$$

тогда

$$x' = -n \cdot x_0 e^{-nt};$$

слѣдовательно, скорость не мѣняетъ своего направленія и точка все время приближается къ притягивающему центру.

Третій случай:

$$k < n.$$

Пусть

$$n^2 - k^2 = \tau^2.$$

Уравненіе (17) даетъ:

$$\xi' = \tau^2 \xi.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\xi = A \cdot e^{\tau t} + B \cdot e^{-\tau t},$$

гдѣ  $A$  и  $B$  постоянныя произвольныя, опредѣляемыя по начальному положенію и начальной скорости точки.

Далѣе получимъ.

$$x = A \cdot e^{(\tau - n)t} + B \cdot e^{-(\tau + n)t}.$$

Такъ какъ  $\tau - n < 0$ , то оба члена этого выраженія съ теченіемъ времени уменьшаются и, слѣдовательно, по истеченіи достаточно большого промежутка времени точка будетъ находится сколь угодно близко къ притягивающему центру; при  $t = \infty$ ,  $x = 0$ .

Два послѣднихъ случая имѣютъ мѣсто при большомъ сопротив-

ленія, напимѣръ, когда движется намагниченная стрѣлка при сильныхъ магнитныхъ успокоителяхъ.

2. *Примѣромъ* на тотъ случай, когда сила есть функція отъ времени и разстоянія, можетъ служить задача о прямолинейномъ движеніи точки, на котору дѣйствуетъ сила притяженія къ неподвижному центру, пропорціональная разстоянію, и, кромѣ того, переіодическая сила ("возмущающая сила").

Уравненіе движенія по сокращенію на массу точки будетъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x + h \cdot \sin pt \dots \dots \dots (22)$$

гдѣ  $h$  наибольшая величина возмущающей силы при массѣ точки равной единицѣ; періодъ этой силы равенъ  $\frac{2\pi}{p}$ .

Разомотримъ случай, когда  $p$  не равно  $k$ .

Положимъ:

$$x = \xi + \delta \cdot \sin pt,$$

гдѣ  $\delta$  постоянный множитель, который подберемъ такъ, чтобы члены, содержащіе  $\sin pt$ , въ преобразованномъ уравненіи (22) исчезли; - получимъ:

$$\delta = \frac{h}{k^2 - p^2} :$$

тогда уравненіе (22) приметъ знакомый намъ видъ:

$$\xi'' = -k^2 \xi.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\xi = A \sin(kt + B),$$

гдѣ  $A$  и  $B$  постоянныя произвольныя, опредѣляемыя по начальнымъ даннымъ.

Далѣе получимъ:

$$x = A \sin(kt + B) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt.$$



Такимъ образомъ, въ рассматриваемомъ случаѣ точка совершаетъ колебаніе, составное изъ двухъ гармоническихъ колебаній; первое изъ нихъ называется „собственнымъ“ или „свободнымъ“ колебаніемъ, а второе „вынужденнымъ“ колебаніемъ.

Замѣчательное свойство вынужденнаго колебанія состоитъ въ томъ, что при маломъ значеніи  $h$ , т.е. при малой возмущающей силѣ, амплитуда вынужденнаго колебанія будетъ имѣть большую величину, если только величины  $k$  и  $p$  мало различаются между собою, т.е. если періоды собственного колебанія и возмущающей силы близки другъ къ другу.

Въ этомъ и состоитъ явленіе резонанса - въ простѣйшей формѣ.

Въ случаѣ, когда  $p = k$ , получимъ:

$$x = A \sin(kt + \beta) - \frac{h}{2k} \cdot t \cdot \cos kt;$$

- подставляя это выраженіе  $x$  въ ур. (22), легко убѣдиться въ томъ, что оно удовлетворяетъ этому уравненію.

3. Какъ примѣръ на тотъ случай, когда сила зависитъ отъ разстоянія, скорости и времени, мы можемъ взять предыдущую задачу, введя въ нее сопротивленіе среды, пропорціональное скорости.

Уравненіе движенія будетъ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x - 2n x' + h \sin pt;$$

здѣсь  $2n$  есть величина сопротивленія, которое встрѣчаетъ точка массъ, равной единицѣ, движущаяся со скоростью, равной единицѣ.

Сила  $m h \sin pt$ , гдѣ  $m$  масса точки, есть возмущающая сила.

Найдемъ сначала частное рѣшеніе этого уравненія; - оно бу-

дѣтъ, очевидно, вида:

$$x = C \cdot \cos pt + D \sin pt,$$

гдѣ  $C$  и  $D$  постоянныя величины, которыя нужно соответствен-  
нымъ образомъ опредѣлить.

Подставивши это выраженіе  $x$  въ дифференціальное уравне-  
ніе, приравниваемъ коэффициенты при  $\cos pt$  и  $\sin pt$  въ обѣихъ  
частяхъ; - получаемъ:

$$\begin{aligned} -C \cdot p^2 &= -C \cdot k^2 - 2D \cdot n \cdot p, \\ -D \cdot p^2 &= -D \cdot k^2 + 2C \cdot n \cdot p + h. \end{aligned}$$

Откуда слѣдуетъ

$$\begin{aligned} C \cdot (k^2 - p^2) &= -2D \cdot n \cdot p, \\ 2C \cdot n \cdot p - D \cdot (k^2 - p^2) &= h. \end{aligned}$$

Отсюда находимъ:

$$\begin{aligned} C &= \frac{2np \cdot h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}, \\ D &= \frac{(k^2 - p^2) \cdot h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}. \end{aligned}$$

Введемъ величину  $\delta$ , полагая

$$\sin \delta = \frac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad \cos \delta = \frac{-(k^2 - p^2)}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}},$$

тогда искомое частное рѣшеніе представится въ видѣ:

$$x = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \cdot \sin(pt + \delta).$$

Такъ какъ дифференціальное уравненіе задачи линейное съ  
последнимъ членомъ, то общій интегралъ его мы получимъ, при-  
бавляя найденное частное рѣшеніе къ извѣстному уже намъ обще-  
му интегралу соответствующаго уравненія безъ послѣдняго чле-  
на:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x - 2nx'$$

Въ случаѣ наиболѣе важномъ, когда  $k > n$ , т.е. при маломъ сопротивленіи, мы получимъ такимъ образомъ слѣдующее выраже -  
ніе для  $x$  :

$$x = A e^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t + B) + \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} \sin(pt + \delta),$$

гдѣ  $A$  и  $B$  постоянныя, значенія которыхъ опредѣляются поло -  
женіемъ и скоростью точки въ начальный моментъ  $t = 0$ , а вели -  
чина  $\delta$  опредѣляется уравненіемъ:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2np}{p^2 - k^2}.$$

Точка совершаетъ въ этомъ случаѣ движеніе, составное изъ  
колебаній двухъ типовъ: колебаній затухающихъ и колебаній вы -  
нужденныхъ; въ дѣйствительности первое изъ нихъ черезъ не -  
большой промежутокъ времени обыкновенно становится уже неза -  
мѣтнымъ по сравненію со вторымъ.

При маломъ сопротивленіи амплитуда вынужденныхъ колебаній,  
равная  $\frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}$ , будетъ весьма большою даже при  
маломъ значеніи  $h$ , т.е. при малой возмущающей силѣ, тогда,  
когда величины  $k$  и  $p$  будутъ мало отличаться другъ отъ дру -  
га, слѣдовательно, тогда, когда періодъ возмущающей силы и пе -  
ріодъ гармоническихъ колебаній, соответствующихъ силѣ  $-mkx^2$ ,  
будутъ близки къ равенству; - въ этомъ случаѣ мы имѣемъ явле -  
ніе резонанса.

## Г Л А В А II.

### КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНІЕ, ОПРЕДѢЛЕНІЕ КОТОРАГО ПРИВОДИТСЯ КЪ ОПРЕДѢЛЕНІЮ ДВУХЪ ИЛИ ТРЕХЪ ДВИЖЕНІЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХЪ.

#### Движеніе точки въ плоскости.

Если точка во все время движенія остается въ одной плоскости, то скорость ея въ каждый моментъ (слѣдовательно, и въ начальный моментъ) направлена въ этой плоскости; измѣненіе скорости, а потому и ускореніе точки также заключается въ плоскости движенія, слѣдовательно, и сила постоянно направлена въ этой плоскости. Такимъ образомъ, плоскостью движенія точки можетъ быть только плоскость, проведенная черезъ начальное направленіе скорости и начальное направленіе силы, и движеніе будетъ плоскимъ только тогда, если сила все время останется въ этой плоскости.

Важнѣйшіе случаи, въ которыхъ точка совершаетъ плоское движеніе, будутъ слѣдующіе: 1, при дѣйствіи силы тяжести; 2, при дѣйствіи центральной силы \*) притяженія или отталкиванія, когда притягивающій или отталкивающій центръ неподвиженъ; и 3, когда къ силѣ тяжести или къ силѣ центральной присоединяется сопротивленіе среды.

Возьмемъ координатныя оси  $OX$  и  $OY$ . Пусть на точку

---

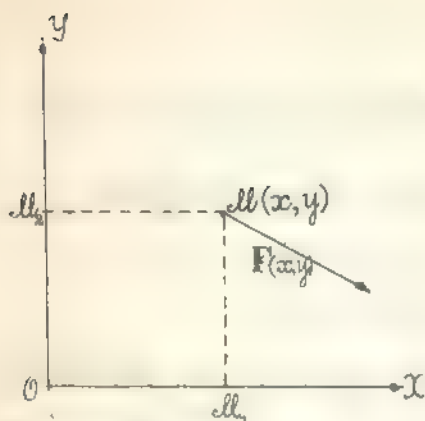
\*) Сила, приложенная къ точке, называется центральной силой тогда, когда линія ея дѣйствія постоянно проходитъ черезъ одну и ту же точку, которая и называется центромъ.

$M(x, y)$  действует сила  $F$ , проекція которой на оси  $Ox$  и  $Oy$ :  $X, Y$ .

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$



Чертежъ 40.

Сила  $F$ , вообще говоря, можетъ зависѣть отъ времени, положенія и скорости точки, поэтому въ общемъ случаѣ  $X$  и  $Y$  могутъ быть выражены какъ функціи отъ переменныхъ  $t, x, y, x', y'$ ; общихъ при-

емовъ интегрированія при какихъ угодно выраженіяхъ  $x$  и  $y$  указать нельзя.

Простѣйшій случай представляется тогда, когда мы можемъ опредѣлить независимо другъ отъ друга движенія проекцій  $M_1$  и  $M_2$  (черт. 40) точки  $M$  на координатныя оси; для этого необходимо и достаточно, чтобы выраженіе проекціи силы  $X$  не содержало  $y$  и  $y'$ , а выраженіе проекціи  $Y$  не содержало  $x$  и  $x'$ .

$$X = f_1(t, x, x'),$$

$$Y = f_2(t, y, y').$$

Опредѣленіе криволинейнаго движенія точки  $M$  въ указанномъ случаѣ приводится къ опредѣленію прямолинейныхъ движеній ея проекцій  $M_1$  и  $M_2$ . Интегрируя уравненіе

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = f_1(t, x, x'),$$

получимъ два интеграла, содержащіе двѣ постоянныхъ произвольныхъ  $C_1$  и  $C_2$ ; интегрируя уравненіе:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = f_2(t, y, y'),$$

получимъ еще два интеграла, содержащіе тоже двѣ постоянныхъ произвольныхъ  $C_2$  и  $C_3$ ; для опредѣленія величинъ  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  должны быть извѣстны начальныя данныя:

$$\text{при } t = 0$$

$$x_0 = a; \quad y_0 = b;$$

$$x'_0 = \alpha; \quad y'_0 = \beta.$$

Получивъ такимъ образомъ выраженія для  $x$  и  $y$  въ функцияхъ времени, исключаемъ изъ нихъ  $t$ , если это возможно, и находимъ уравненіе траекторіи точки.

**Первый примѣръ:** Криволинейное движеніе точки при дѣйствіи силы тяжести.

Ось  $OX$  горизонтальна; ось  $OY$  направлена по вертикали вверхъ (черт. 41).

Дано:

$$X = 0; \quad Y = -mg,$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0.$$

$$x'_0 = v_0 \cos \gamma = \alpha,$$

$$y'_0 = v_0 \sin \gamma = \beta.$$

Дифференціальныя уравненія движенія, по сокращеніи на  $m$ , будутъ:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -g \dots \dots \dots (2)$$

Интегралы уравненія (1) будутъ:

$$x' = \alpha, \quad x = \alpha t.$$

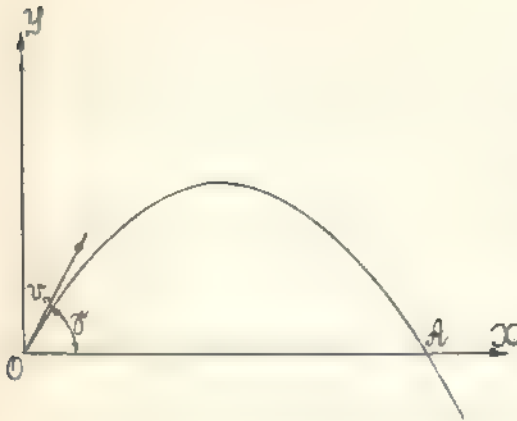
Интегралы уравненія (2):



$$\begin{aligned} y' &= -gt + \beta; \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + \beta t. \end{aligned}$$

Исключая  $t$  изъ выражений  $x$  и  $y$ , получимъ уравненіе траекторіи точки:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x - \frac{g}{2\alpha^2} x^2 \quad (3)$$



Чертежъ 41.

уравненіе (3) есть уравненіе параболы.

Пользуясь найденными уравненіями, легко рѣшить рядъ вопросовъ относительно разсматриваемаго движенія точки, какъ-то: опредѣлить въ зависимости отъ величины начальной скорости

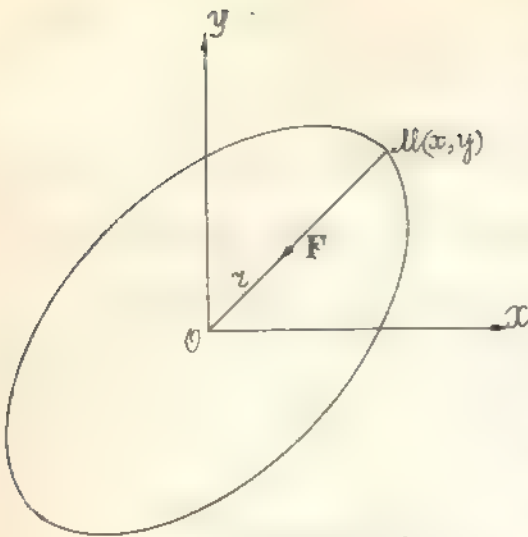
и ея направленія, время и высоту поднятія точки, дальность ея полета  $OA$ ; далѣе опредѣлить уголъ  $\gamma$  для наибольшей дальности полета при данной величинѣ начальной скорости  $v_0$ ; опредѣлить уголъ  $\gamma$ , подъ которымъ нужно бросить тяжелую точку, чтобы она при заданной величинѣ начальной скорости  $v_0$  прошла черезъ точку  $C(x, y)$ .

Второй примѣръ. Криволинейное движеніе точки при дѣйствіи силы притяженія къ неподвижному центру, пропорціональной разстоянію.

Пусть на точку  $M(x, y)$  (черт. 42) дѣйствуетъ сила  $F = k^2 m r$ ; проекціи силы  $F$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  будутъ:

$$X = -k^2 m r \cdot \frac{x}{r} = -k^2 m x,$$

$$Y = -k^2 m r \cdot \frac{y}{r} = -k^2 m y.$$



Чертеж 42.

Уравненія движенія, по со-  
кращеніи на  $m$ , будуть:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2y.$$

Вторые интегралы задачи,  
какъ известно изъ предыду-  
щей главы (стр. 100), бу-  
дутъ:

$$x = a \cos kt + \frac{\alpha}{k} \sin kt \dots \dots \dots (4).$$

$$y = b \cos kt + \frac{\beta}{k} \sin kt \dots \dots \dots (5)$$

Исключивъ изъ уравненій (4) и (5) время, найдемъ уравне-  
ніе траекторіи точки; такъ какъ это уравненіе будетъ, очевид-  
но, второй степени, а  $x$  и  $y$  имѣютъ конечныя значенія, то  
траекторія точки будетъ эллипсъ.

### Третій примѣръ.

Криволинейное движеніе точки при дѣйствіи силы тяжести въ  
средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально первой степени  
скорости  $(n, m, v)$ .

Проекціи равнодѣйствующей двухъ силъ, приложенныхъ къ точ-  
кѣ, будутъ:

$$X = -n \cdot m \cdot x',$$

$$Y = -mg - n \cdot m \cdot y',$$

въ предположеніи, что ось  $OY$  направлена по вертикали вверхъ.

Уравненія движенія, по сокращеніи на  $m$ , представятся въ  
видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n \cdot x' \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -q - n \cdot y' \dots \dots \dots (7)$$

Интегрируя уравненія (6) и (7) каждое отдѣльно, какъ указано въ предыдущей главѣ (стр. 102-107), получаемъ  $x$  и  $y$ , какъ извѣстныя функціи времени:

$$x = a + \frac{\alpha}{n} (1 - e^{-nt})$$

$$y = b - \frac{q}{n} t + \frac{q + n\beta}{n^2} (1 - e^{-nt})$$

исключая изъ этихъ уравненій время  $t$ , получимъ уравненіе траекторіи точки.

Четвертый примѣръ.

Криволинейное движеніе точки въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально первой степени скорости, при дѣйствіи силы притяженія къ неподвижному центру, пропорціональной разстоянію.

Проекціи равнодѣйствующей двухъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, будутъ:

$$X = -k^2 \cdot m \cdot x - n \cdot m \cdot x';$$

$$Y = -k^2 \cdot m \cdot y - n \cdot m \cdot y'.$$

Уравненія движенія по сокращеніи на  $m$  представляются въ видѣ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x - n x' \dots \dots \dots (8)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y - n y' \dots \dots \dots (9)$$

Интегрируя уравненія (8) и (9) каждое отдѣльно, какъ указано въ предыдущей главѣ (стр. 110-114), находимъ  $x$  и  $y$ ,

какъ функція времени.

Замѣтимъ, что опредѣленіе криволинейнаго движенія тяжелой точки въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально квадрату скорости ( $n, m, v$ ), уже не можетъ быть сведено къ опредѣленію прямолинейныхъ движеній проекцій этой точки на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ, если точка движется, напримѣръ, вверхъ, то, предполагая, что ось  $Oy$  направлена по вертикали вверхъ, уравненія движенія по сокращеніи на  $m$ , будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -n \cdot v \cdot x' ;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - n \cdot v \cdot y' ;$$

а такъ какъ

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2} ,$$

то и въ первое, и во второе уравненіе движенія войдутъ и  $x'$ , и  $y'$ .

Подобный же случай представляетъ движеніе точки, при дѣйствіи центральной силы, обратно пропорціональной квадрату расстоянія: уравненія этого движенія по сокращеніи на  $m$ , будутъ:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k^2x}{r^3} .$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k^2y}{r^3} .$$

и

----- " -----

### НЕПЛОСКОЕ ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ.

Если при движеніи точки сила, къ ней приложенная, не остается въ одной плоскости, проходящей черезъ начальныя направленія скорости и силы, то точка будетъ описывать кривую двойной кривизны.

Въ этомъ случаѣ необходимо взять три координатныя оси:  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ .

Пусть на точку  $M(x, y, z)$  дѣйствуетъ сила  $F$ , проекціи которой:  $X, Y, Z$ . Дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

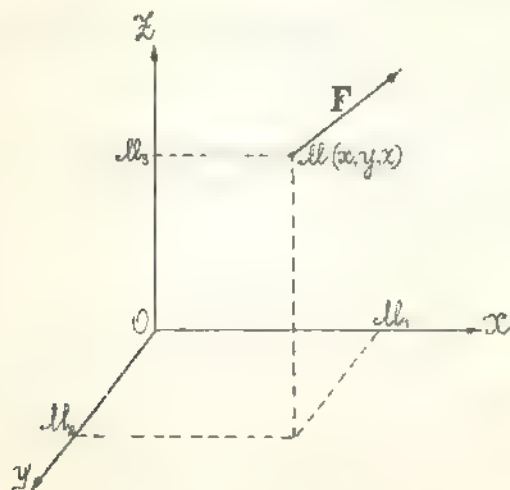
$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Вообще говоря,  $X, Y, Z$  выражаются какъ функціи отъ

перемѣнныхъ:  $t, x, y, z, x', y', z'$  - и общихъ пріемовъ для рѣшенія вопроса о движеніи указать нельзя.

Простѣйшій случай представляется тогда, когда мы можемъ опредѣлить порознь движеніе каждой изъ трехъ проекцій  $M_1, M_2$  и  $M_3$  точки



Чертежъ 18.

$\mathcal{M}$  на координатныя оси (черт.43); для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} X &= f_1(t, x, x') , \\ Y &= f_2(t, y, y') , \\ Z &= f_3(t, z, z') . \end{aligned}$$

Определение движения точки  $\mathcal{M}$  по кривой двойкой кривизны въ указанномъ случаѣ приводится къ определению прямолинейныхъ движений ея проекцій  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$  и  $\mathcal{M}_3$ .

Интегрируя три уравненія движения:

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} &= f_1(t, x, x') ; \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} &= f_2(t, y, y') ; \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} &= f_3(t, z, z') . \end{aligned}$$

получимъ шесть интеграловъ, содержащихъ шесть постоянныхъ произвольныхъ:  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$ ,  $D_2$ ,  $C_3$  и  $D_3$ , для определения которыхъ необходимо знать начальныя данныя:  $x_0 = \alpha$ ,  $y_0 = \beta$ ,  $z_0 = \gamma$ ,  $x'_0 = \alpha'$ ,  $y'_0 = \beta'$ ,  $z'_0 = \gamma'$ ;  $t = t_0$  (часто  $t_0 = 0$ ).

**Примѣръ.** Движеніе точки  $\mathcal{M}$  при дѣйствіи пропорціональныхъ разстоянію силъ притяженія къ неподвижному центру  $\mathcal{O}$  и къ центру  $\mathcal{C}$ , который равномерно движется по оси  $\mathcal{OX}$  (черт.44).

Уравненіе движенія притягивающаго центра  $\mathcal{C}$  :

$$x_c = a + bt.$$

Пусть величины силъ притяженія будутъ:

$$k^2 m \overline{MO} \quad \text{и} \quad n^2 m \overline{MC} ;$$

тогда проекціи ихъ равнодѣйствующей на оси  $\mathcal{CX}$ ,  $\mathcal{CY}$  и  $\mathcal{CZ}$  будутъ:

$$X = -k^2 m x - n^2 m (x - a_c),$$





если подобрать  $\alpha$  и  $\beta$  такъ, чтобы онѣ удовлетворяли уравне-  
ніямъ:

$$-p^2\alpha + m^2a = 0$$

и

$$p^2\beta + n^2b = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{n^2a}{p^2},$$

и

$$\beta = -\frac{n^2b}{p^2}.$$

то уравнение (10) приметъ такой видъ:

$$\xi'' = -p^2\xi, \dots\dots\dots (14)$$

соотвѣтствующіе интегралы намъ извѣстны.

Такимъ образомъ имѣемъ:

$$x = (x_0 - \frac{n^2a}{p^2})\cos pt + (\frac{x_0}{p} - \frac{n^2b}{p^2})\sin pt + \frac{n^2}{p^2}(a + bt),$$

$$y = y_0 \cos pt + \frac{y_0'}{p} \sin pt,$$

$$z = z_0 \cos pt + \frac{z_0'}{p} \sin pt.$$

Исключая  $t$  изъ двухъ послѣднихъ уравненій, получимъ, какъ  
извѣстно, уравненіе эллипса въ плоскости  $KZ$ ; отсюда слѣду-  
етъ, что траекторія точки расположена на эллиптическомъ ци-  
линдрѣ, ось котораго есть ось  $K$ ; такъ какъ при измѣненіи  
 $t$  на величину  $\frac{2\pi}{p}$  координата  $x$  получаетъ приращеніе, равное  
 $\frac{2\pi n^2 b}{p^2}$ , то траекторія будетъ имѣть видъ винтовой линіи.

### Г Л А В А III.

#### ЗАКОНЪ ЖИВОЙ СИЛЫ.

Въ первой части "Курса Теоретической Механики" (издание 1914 г.)\*) были уже установлены какъ понятіе о работѣ силы, къ точкѣ приложенной, такъ и понятіе о живой силѣ матеріальной точки; тамъ же были выведены и уравненія, выражающія законъ живой силы въ случаѣ одной матеріальной точки:

въ дифференціальной формѣ:

$$d \frac{mv^2}{2} = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz \dots \dots \dots (1)$$

въ конечной формѣ:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{x_1}^{x_2} (X \, dx + Y \, dy + Z \, dz), \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = F \cos(F, v) |dz|$$

#### § 1. Силы, имѣющія потенціалъ.

Для того, чтобы опредѣлить конечную работу силы, нужно, вообще говоря, уиѣть выразить элементарную работу  $X \, dx + Y \, dy + Z \, dz$  въ функціи отъ одной изъ переменныхъ, напримѣръ,  $t$  или  $s$  или  $x$ , а для этого, вообще говоря, необходимо предварительно знать выраженія координатъ точки въ функціяхъ отъ времени.

---

\*) Кинематика. Основные понятія. Стр. 174 - 181.

Но существуетъ очень важный случай, когда, и не зная движенія точки, мы можемъ опредѣлить работу силы, — это будетъ тогда, когда сила зависитъ только отъ положенія точки и при томъ элементарная работа силы выражается полнымъ дифференциаломъ некоторой функціи отъ координатъ точки:

$$F \cos(F, r) \cdot |ds| = X dx + Y dy + Z dz = dU(x, y, z) \dots (3)$$

функція  $U$  называется *силовою функціей*; сила  $F$  называется въ этомъ случаѣ *силою*, или *имѣетъ потенціалъ*.

Если сила  $F(X, Y, Z)$  имѣетъ потенціалъ, то, на основаніи уравненія (3), имѣемъ:

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

откуда

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, Y = \frac{\partial U}{\partial y}, Z = \frac{\partial U}{\partial z} \dots \dots \dots (4)$$

Слѣдовательно, сила имѣетъ потенціалъ, когда ея проекціи на координатныя оси выражаются частными производными отъ одной и той же функціи по соответствующимъ координатамъ точки; проекціи силы въ этомъ случаѣ удовлетворяютъ слѣдующимъ тремъ равенствамъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Къ числу силъ, имѣющихъ потенціалъ, принадлежатъ: 1, *сила тяжести*, 2, *центральныя силы*, зависящія только отъ расстоянія. Въ самомъ дѣлѣ, пусть ось направлена по вертикали вверхъ (чертежъ 45), тогда, въ случаѣ *силы тяжести* имѣемъ:

$$X=0, Y=0, Z=-mg;$$

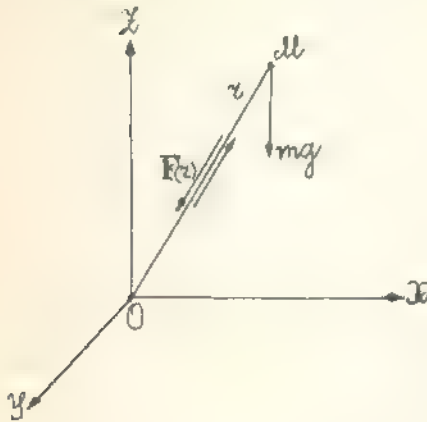
поэтому:

$$F |ds| \cos(F, v) = -mg \, dz = d(mgz) = dU$$

и силовая функція будетъ:

$$U = -mgz.$$

Рассмотримъ случай центральной силы притяженія или отталкиванія, величина которой выражается функціей расстоянія точки отъ дѣйствующаго неподвижнаго центра. Примемъ центръ силы за начало координатъ.



Чертежъ 45.

Пусть на точку  $M$  дѣйствуетъ центральная сила, равная  $F(r)$ ; условимся брать функцію  $F(r)$  со знакомъ  $+$ , когда сила отталкивательная, и со знакомъ  $-$ , когда сила притягательная.

Проекція силы  $\pm F(r)$  на координатныя оси  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$

будутъ:

$$X = \pm F(r) \frac{x}{r},$$

$$Y = \pm F(r) \frac{y}{r},$$

$$Z = \pm F(r) \frac{z}{r},$$

слѣдовательно, элементарная работа силы равна:

$$\begin{aligned} X \, dx + Y \, dy + Z \, dz &= \pm F(r) \cdot \frac{x \, dx + y \, dy + z \, dz}{r} = \\ &= \pm F(r) \frac{1}{2} \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{r} = \pm F(r) \frac{r \, dr}{r} = \pm F(r) \, dr. \end{aligned}$$

очевидно, что  $\pm F(z) dz$  есть дифференціалъ функціи, которая равна:

$$\int \pm F(z) \cdot dz.$$

Такимъ образомъ, для разсматриваемой центральной силы силовая функція будетъ:

$$U = \int \pm F(z) \cdot dz.$$

Въ частномъ случаѣ, когда сила притяженія къ началу координатъ слѣдуетъ закону Ньютона:

$$F = - \frac{k^2 m}{z^2}$$

и силовая функція будетъ:

$$U = \int - \frac{k^2 m}{z^2} dz = \frac{k^2 m}{z}.$$

Если на точку дѣйствуютъ силы:  $F_1$ , имѣющая потенциалъ  $U_1(x, y, z)$  сила  $F_2$ , имѣющая потенциалъ  $U_2(x, y, z)$ , сила  $F_3$ , имѣющая потенциалъ  $U_3(x, y, z)$  и т.д., то силовая функція для равнодѣйствующей будетъ, очевидно, равна суммѣ силовыхъ функцій для ея составляющихъ:

$$U_1 + U_2 + U_3 + \dots$$

*Примѣаніе.* Замѣтимъ, что къ найденному выраженію силовой функціи всегда можетъ быть прибавлена какая-угодно постоянная величина, напримѣръ, для силы тяжести можемъ положить:

$$U = -mgz + \text{const.}$$

-----



Рассмотрим некоторые свойства силы, имѣющей потенциалъ.

Пусть сила, приложенная къ точкѣ, имѣетъ силовую функцію:

$$U(x, y, z).$$

Для опредѣленнаго положенія точки, которому соответствуютъ опредѣленные значенія координатъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , силовая функція  $U$  имѣетъ опредѣленную величину:

$$U(x, y, z) = C$$

Приравнивая функцію  $U(x, y, z)$ , гдѣ  $x, y, z$  величины переменныя, постоянной  $C$ , получимъ уравненіе:

$$U(x, y, z) = C,$$

которое представляетъ уравненіе поверхности, проходящей черезъ данное положеніе точки; эта поверхность называется *поверхностью уровня* для данной силы; постоянная  $C$  называется *параметромъ поверхности*, — во всѣхъ точкахъ одной и той же поверхности уровня силовая функція имѣетъ одно и то же значеніе.

При различныхъ значеніяхъ параметра  $C$  получаемъ систему поверхностей уровня, заполняющую все пространство, внутри котораго силовая функція имѣетъ дѣйствительныя значенія.

Для силы тяжести поверхности уровня суть горизонтальныя плоскости

$$-m \cdot g \cdot z = C,$$

следовательно:

$$z = \text{const.}$$

Для центральной силы, зависящей только отъ разстоянія, поверхности уровня суть поверхности шаровъ съ центромъ въ центръ силы; въ самомъ дѣлѣ, пусть

$$u = \int \pm F(z) \cdot dz = f(z),$$

гдѣ

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

тогда уравненіе поверхности уровня будетъ:

$$f(z) = C,$$

откуда

$$z = \text{const.}$$

Положимъ, что черезъ точку  $M(x, y, z)$ , на которую дѣйствуетъ сила  $F$ , имѣющая потенциалъ, проведена поверхность уровня  $u = C$ .

Найдемъ направленіе силы  $F$  въ точкѣ  $M$ .

Косинусы угловъ, составляемыхъ силою  $F$  съ координатными осями  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$ , будутъ:

$$\cos(F, X) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\Delta u},$$

$$\cos(F, Y) = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\Delta u},$$

$$\cos(F, Z) = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\Delta u},$$

гдѣ

$$\Delta u = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Извѣстно, что такими формулами выражаются косинусы угловъ, составляемыхъ съ координатными осями  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  нормалью въ точкѣ  $M$  къ поверхности, выражаемой уравненіемъ:

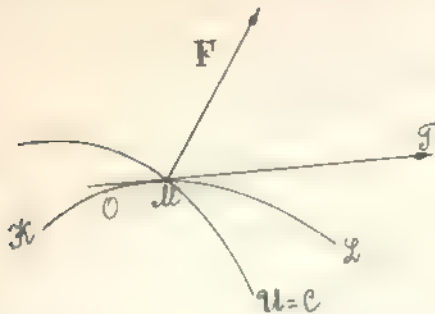
$$u(x, y, z) = \text{const.};$$

слѣдовательно, сила, имѣющая потенциалъ и приложенная къ точкѣ  $M$ , направлена по нормали къ поверхности уровня, проведен-

ной через точку  $M$  \*).

Найдемъ выраженіе проекціи силы  $F$ , нѣвней потенциаля,

на направленіе касательной  $MT$  къ некоторой данной кривой  $KL$ , проходящей черезъ точку  $M(x, y, z)$  (черт. 46).



Чертежъ 46.

Выразимъ координаты точки  $M$  въ видѣ функцій отъ длины дуги  $s$ , отсчитываемой по кривой  $KL$  отъ

произвольно выбранной точки  $O$ ; пусть будутъ:

$$x = \varphi_1(s),$$

$$y = \varphi_2(s),$$

$$z = \varphi_3(s);$$

тогда силовая функція  $U$  можетъ быть выражена какъ функція отъ  $s$ :  $U(s)$ .

Положимъ, что касательная  $MT$  проведена въ сторону возрастающихъ дугъ; тогда имѣемъ:

$$F \cos(F, MT) = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds}$$

Трехчленъ въ правой части уравненія представляетъ полную производную функція по дугѣ:

$$\frac{dU}{ds};$$

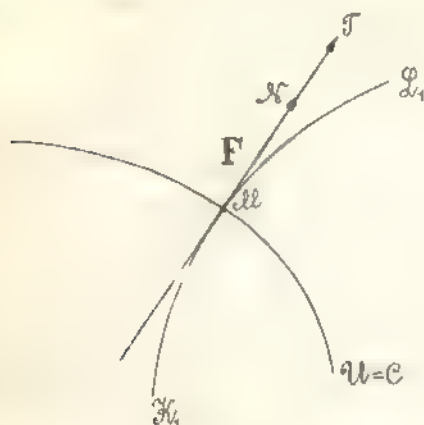
следовательно:

\*) Пространство, заполненное поверхностями уровня данной силовой функція, называется силовымъ полемъ; кривыя, пересѣкающія поверхности уровня ортогонально къ нимъ, называются силовыми линіями.

$$F \cos(F, MT) = \frac{\partial U}{\partial s} \dots \dots \dots (7)$$

Полученный результат мы примѣнимъ къ частному случаю, когда кривая  $K, L_1$  направлена ортогонально къ пересѣкаемымъ ею

поверхностямъ уровня (черт. 47). Касательная  $MT$  къ кривой  $K, L_1$  въ точкѣ  $M$  будетъ въ то же время нормалью въ этой точкѣ къ поверхности уровня.



Чертежъ 47.

Элементъ дуги кривой  $K, L_1$  обозначимъ черевъ  $dn$ ; тогда упомянутый выше дифференціалъ  $ds$  замѣнится дифферен-

циаломъ  $dn$ , который будетъ также величиной положительной.

На основаніи уравненія (7) имѣемъ:

$$F \cos(F, X) = \frac{dU}{dn}$$

Такъ какъ сила  $F$  направлена по нормали  $Y$ , то ея проекція на нормаль можетъ быть равна  $+F$  или  $-F$ ; слѣдовательно:

$$\frac{dU}{dn} = +F, \text{ когда } \frac{dU}{dn} > 0,$$

и

$$\frac{dU}{dn} = -F, \text{ когда } \frac{dU}{dn} < 0.$$

Если  $\frac{dU}{dn} > 0$ , то значеніе  $U$  возрастаетъ по направленію нормали, такъ какъ  $dn > 0$ ; нормаль  $MT$  въ этомъ случаѣ называется положительною: она направлена въ ту часть пространства, гдѣ разность  $U - C$ , равная нулю на поверхности, получаетъ положительныя значенія.

Отсюда заключаемъ, что сила  $F$ , имѣющая потенціалъ и при-

ложенная къ точкѣ  $M$ , всегда направлена по положительной нормали къ поверхности уровня, проведенной черезъ точку  $M$ . Быстъ съ тѣмъ мы получили, что величину силы  $F$  можно выразить производной:  $\frac{dU}{dn}$ , т.е. какъ предѣлъ отношенія приращенія параметра поверхности уровня къ соответствующему бесконечно малому отрѣзку положительной нормали \*).

----- " -----

Обратимся теперь къ опредѣленію работы силы, имѣющей потенциалъ.

Интегрируя обѣ части уравненія (3) отъ положенія точки  $M_1$  до положенія  $M_2$ , находимъ:

$$\int_{M_1}^{M_2} (Xdx + Ydy + Zdz) = U_2 - U_1 \dots \dots (8)$$

гдѣ  $U_1$  и  $U_2$  суть значенія силовой функціи въ точкахъ  $M_1$  и  $M_2$ .

Въ большинствѣ случаевъ, какъ напримѣръ, для силы тяжести и силъ центральныхъ, силовая функція  $U$  есть функція однозначная. Тогда для положенія  $M_1$  имѣемъ одно опредѣленное значеніе функціи  $U_1$ :

-----  
\*) Для большей общности за опредѣленіе силовой функціи можно было взять ур-ію (4), — тогда возможны и такіа силовыя функціи, которыя ясно содержатъ время:

$$U(x, y, z, t);$$

въ этомъ случаѣ уравненіе (3) уже не имѣетъ смысла:

$$F \cos(F, r) / ds = dU(x, y, z, t) - \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

$$U_1 = U(x_1, y_1, z_1),$$

а также для положенія  $U_2$  :

$$U_2 = U(x_2, y_2, z_2).$$

На основаніи предыдущаго уравненія заключаемъ: если сила имѣетъ однозначную силовую функцію, то работа силы на нѣкоторомъ пути точки зависитъ только отъ крайнихъ положеній точки и не зависитъ отъ формы пути.

Въ частномъ случаѣ, при существованіи однозначной силовой функціи, если точка, совершивъ нѣкоторый путь, возвращается въ свое первоначальное положеніе (общіе - на первоначальную поверхность уровня), то работа силы на всемъ пути будетъ равна нулю.

## § 2. "Законъ сохраненія живой силы" или "законъ сохраненія полной энергіи точки".

Примѣнимъ законъ живой силы къ тому случаю, когда сила, приложенная къ точкѣ, имѣетъ потенціалъ. Уравненіе (1) даетъ намъ въ этомъ случаѣ, въ силу уравненія (3):

$$d \frac{mv^2}{2} = dU, \dots \dots \dots (9)$$

а уравненіе (2) въ силу уравненія (8):

$$\frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = U_2 - U_1 \dots \dots \dots (10)$$

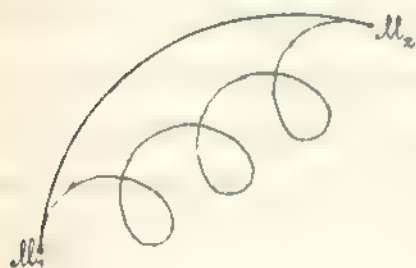
Уравненіе (10) выражаетъ, что приращеніе живой силы точки при переходѣ ея изъ одного положенія въ другое равняется разности значеній силовой функціи для крайнихъ положеній точки.

Когда силовая функція есть функція однозначная, какъ на-примѣръ, въ случаѣ силы тяжести или силъ центральныхъ, мы выводимъ изъ уравненія (10) слѣдующее важное заключеніе: если



равнодѣйствующая сила, приложенныхъ къ точкѣ, имѣетъ однозначную силовую функцію, то приращеніе живой силы точки на любой части ея пути не зависитъ отъ формы пути, а только отъ начального и конечнаго положенія точки на этой части пути, и равно разности значеній параметровъ соотвѣствующихъ крайнихъ поверхностей уровня.

Отсюда слѣдуетъ, что при существованіи однозначной силовой функціи, если точка возвра-  
щается въ прежнее положе-



ніе, то возвращается съ такою же живою силою, которую она имѣла при выходѣ изъ этого положенія; поэтому относительно уравненія (10) можно сказать, что при однозначной

Чертежъ 48.

функціи  $U$  оно выражаетъ законъ сохраненія живой силы.

Интегрируя уравненіе:

$$d \frac{mv^2}{2} = dU,$$

мы получимъ:

$$\frac{mv^2}{2} = U + h,$$

или

$$\frac{mv^2}{2} - U = h, \dots \dots \dots (11)$$

гдѣ  $h$  постоянная произвольная, опредѣляемая по начальнымъ даннымъ.

Уравненіе (11) представляетъ первый интегралъ задачи о движеніи точки при дѣйствіи силы, имѣющей потенциалъ  $U(x, y, z)$ ; этотъ интегралъ называется интеграломъ живой силы.

Такимъ образомъ, для дифференціальнаго уравненія движенія свободной точки интегралъ живой силы можетъ быть написанъ вся-

кій разъ, какъ сила, приложенная къ точкѣ имѣетъ потенціалъ\*).

Вяснимъ значеніе этого интеграла.

Въ уравненіи (11) вмѣсто силовой функціи  $U$  возьмемъ  $(U - \text{const})$ , причемъ  $\text{const}$  подберемъ такъ, чтобы для всѣхъ положеній разсматриваемой точки выполнялось условіе:

$$-U + \text{const} \geq 0.$$

Величина, выражаемая формулой:

$$[-U(x, y, z) + \text{const}]$$

называется *потенціальной энергіей* матеріальной точки въ положеніи ея, опредѣляемомъ координатами  $x, y, z$ ; для измѣренія потенціальной энергіи служатъ тѣ же единицы, что и для измѣренія работы силы.

Интегралъ живой силы (11) можемъ представить въ видѣ:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} + (-U + \text{const}) = h_1, \dots \dots \dots (12)$$

гдѣ  $h_1$  есть величина постоянная.

Отсюда заключаемъ: когда сила, приложенная къ точкѣ, имѣетъ потенціалъ, то сумма кинетической и потенціальной энергій матеріальной точки во все время движенія сохраняетъ постоянную величину.

Сумму кинетической и потенціальной энергій матеріальной точки называютъ ея *полной энергіей*.

Такимъ образомъ, уравненіе (12), а слѣдовательно, и равносильное ему уравненіе (11) выражаетъ *законъ сохранения полной энергіи матеріальной точки*.

---

\*) Если силовая функція не содержитъ времени, интегралъ живой силы не имѣетъ смысла.

## Г Л А В А IV.

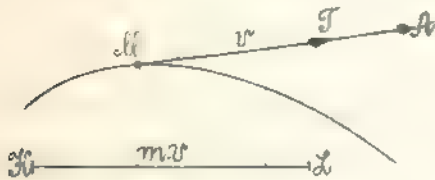
### "ЗАКОНЪ МОМЕНТОВЪ" ИЛИ "ЗАКОНЪ ПЛОЩАДЕЙ".

#### § 1. Количество движѣнія матеріальной точки.

**Опредѣленіе.** Количество движѣнія матеріальной точки есть векторъ, имѣющій направленіе скорости точки, и по величинѣ равный произведенію массы точки на ея скорость.

Пусть точка  $M$ , масса которой равна  $m$ , въ нѣкоторый моментъ имѣетъ скорость (черт. 49)

$$v = MT.$$



Чертежъ 49.

Произведеніе  $m \cdot v$ , какъ всякую величину, выражающуюся нѣкоторымъ опредѣленнымъ числомъ, можно изобразить нѣкоторымъ отрѣзкомъ прямой.

Пусть, напримѣръ:

$$m \cdot v = KL.$$

Отложимъ этотъ отрѣзокъ по прямой  $MT$  отъ точки  $M$ ; векторъ

$$MA = KL = m \cdot v.$$

и есть количество движѣнія матеріальной точки  $M$ .

Единица, служащая для измѣренія количества движѣнія точки, символически представится въ видѣ:

$$(\text{ед. массы}) \times (\text{ед. скор.}) = \frac{(\text{ед. массы}) \times (\text{ед. длины})}{(\text{ед. времени})} = \text{М.Л.Т.}^{-1},$$

а въ системѣ  $CQS$

$$\frac{(\text{тракты}) \times (\text{свѣтл.})}{(\text{сек.})} = g C.S^{-1}.$$

Проекціи количества движенія матеріальной точки на координатныя оси будутъ:

$$MA \cos(MA, X) = m v \cos(v, X) = m x',$$

$$MA \cos(MA, Y) = m v \cos(v, Y) = m y',$$

$$MA \cos(MA, Z) = m v \cos(v, Z) = m z',$$

гдѣ  $x$ ,  $y$ ,  $z$  координаты точки  $M$ , а

$$x' = \frac{dx}{dt}, y' = \frac{dy}{dt}, z' = \frac{dz}{dt}.$$

Такъ какъ количество движенія точки есть, подобно силѣ, векторъ, то мы можемъ ввести понятія: "моментъ количества движенія относительно точки" и "моментъ количества движенія относительно оси".

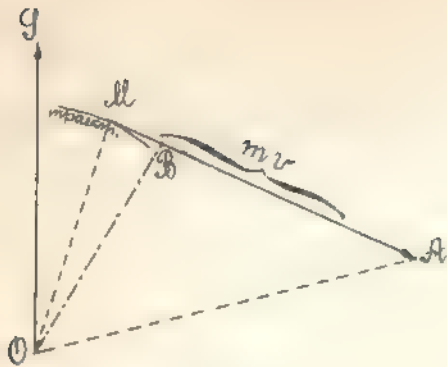
Все, что было изложено въ курсѣ Статики\*) о моментѣ силы, имѣетъ мѣсто для момента количества движенія.

Моментъ количества движенія относительно точки  $O$  есть векторъ  $OQ$  (черт. 50), который по величинѣ равенъ произведенію величины количества движенія  $MA$  на длину перпендикуляра  $OB$ , опущеннаго изъ точки  $O$  на  $MA$ , и направленъ по перпендикуляру къ плоскости  $MOA$  въ такую сторону, чтобы для наблюдателя, помѣщеннаго такъ, что перпендикуляръ идетъ отъ ногъ къ головѣ, количество движенія было направлено слѣва направо:

$$OQ = MA \cdot OB = 2m \cdot \Delta MOA.$$

Моментъ количества движенія относительно оси  $ZH$  (черт.

\*) См. "Курсъ Теоретической Механики", часть I, изданіе 1914 года, стр. 78 - 82.

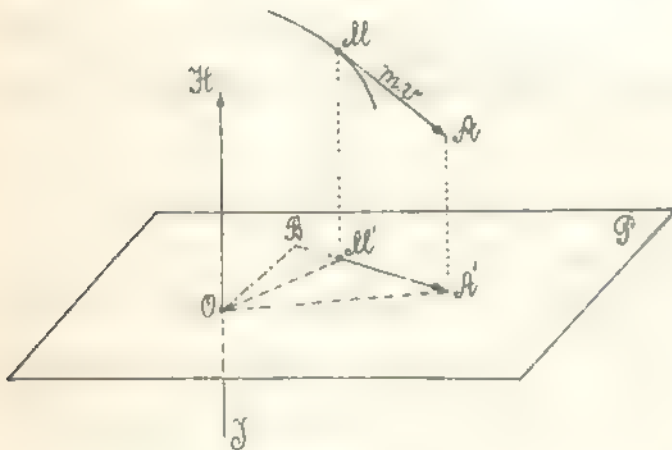


Чертеж 50.

51) равенъ взятому со знакомъ  $+$  или  $-$  произведенію проекцій  $M'A'$  количества движенія  $MA$  на плоскость  $P$ , перпендикулярную къ оси  $YH$ , на длину  $OB$  ( $OB \perp \perp M'A'$ , которая равна кратчайшему расстоянію между количествомъ движенія  $MA$  и осью  $YH$ ), т.е.

$$M'A' \cdot OB = 2\pi \Delta M'OA';$$

это произведеніе берется со знакомъ  $(+)$ , если наблюдатель, помещенный такъ, что ось проходитъ отъ ногъ къ головѣ, видитъ



Чертеж 51.

количество движенія направленнымъ слѣва направо, и со знакомъ  $(-)$  въ противоположномъ случаѣ; величина произведенія можетъ быть отложена на оси отъ

любой точки въ ту или другую сторону, смотря по знаку.

Моментъ количества движенія относительно оси равенъ проекціи на ось момента количества движенія относительно какой-либо точки оси; - эта теорема слѣдуетъ изъ соответствующей теоремы Статики<sup>\*</sup>).

<sup>\*</sup>) Курсъ Теоретической Механики, часть I, стр. 79 (1914г.).

# АНАЛИТИЧЕСКІЯ ВЫРАЖЕНІЯ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНІЯ

## ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ И ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ.

Обозначимъ координаты точки  $M$  черезъ  $x, y, z$ , тогда проекціи количества движенія на координатныя оси будутъ:  $mx', my', mz'$ . Подставляя въ извѣстныя формулы для момента силы относительно координатныхъ осей \*) проекціи количества движенія вмѣсто проекцій силы, мы получимъ слѣдующія выраженія для моментовъ количества движенія относительно координатныхъ осей, которые будемъ обозначать черезъ  $l_x, l_y, l_z$ :

$$l_x = m \cdot (y'z' - zy'),$$

$$l_y = m \cdot (zx' - xz'),$$

$$l_z = m \cdot (xy' - yx').$$

На основаніи приведенной выше теоремы, находимъ слѣдующія выраженія для проекцій на координатныя оси момента  $l$  количества движенія относительно начала координатъ:

$$l \cos(l, x) = m \cdot (y'z' - zy'),$$

$$l \cos(l, y) = m \cdot (zx' - xz'),$$

$$l \cos(l, z) = m \cdot (xy' - yx').$$

Отсюда слѣдуютъ формулы, опредѣляющія величину и направленіе момента количества движенія относительно начала координатъ:

---

\*) См. часть I, формулы (1), стр. 80.



$$l = m \sqrt{(yx' - zy')^2 + (zx' - xy')^2 + (xy' - yx')^2},$$

$$\cos(l, x) = \frac{yx' - zy'}{R},$$

$$\cos(l, y) = \frac{zx' - xy'}{R},$$

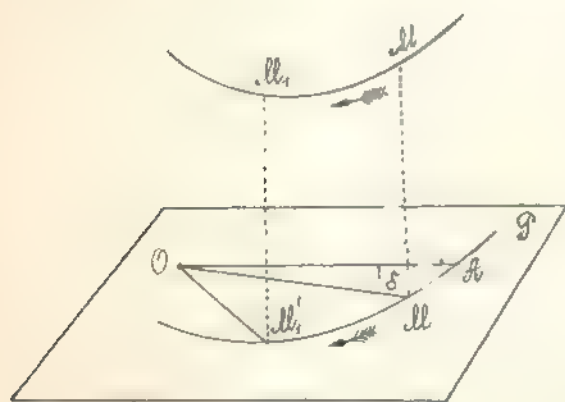
$$\cos(l, z) = \frac{xy' - yx'}{R};$$

гдѣ  $R$  обозначаетъ величину радикала въ выраженіи  $l$ .

Съ понятіемъ о моментѣ количества движенія точки относительно оси тѣсно связано понятіе о *векторіальной скорости* точки.

Когда точка  $M$  движется по своей траекторіи  $MM_1$  (черт. 53), ея проекція  $M'$  на плоскость  $P$  будетъ описывать нѣкоторую кривую  $M'M'_1$ . Если изъ произвольно взятой точки  $O$  на плоскости  $P$  проведемъ радіусъ-векторъ  $OM$ , то при движеніи  $M$  по кривой, этотъ радіусъ-векторъ будетъ описывать площадь сектора  $S$ , которую условимся отсчитывать отъ нѣкотораго радіуса-вектора  $OA$ .

Площадь  $S$  есть функція времени. Какъ въ случаѣ движенія



Чертежъ 53.

точки измѣненія съ теченіемъ времени длины пути  $s$ , проходямаго точкою, привело насъ къ понятію о скорости точки, совершенно такъ же здѣсь измѣненіе площади сектора  $S$  приводитъ насъ къ понятію о *векторіальной скорости*.

Знаемъ, что скорость точки въ моментъ  $t$  выражается производной  $\frac{ds}{dt}$ , аналогичнымъ образомъ мы получимъ, что секто-

риальная скорость точки  $M$  в плоскости  $P$  выражается производной  $\frac{dS}{dt}$ .

Знакъ производной  $\frac{dS}{dt}$  указываетъ, возрастаетъ ли площадь сектора или убываетъ: когда  $\frac{dS}{dt} > 0$ , площадь сектора возрастаетъ, когда  $\frac{dS}{dt} < 0$ , площадь сектора убываетъ.

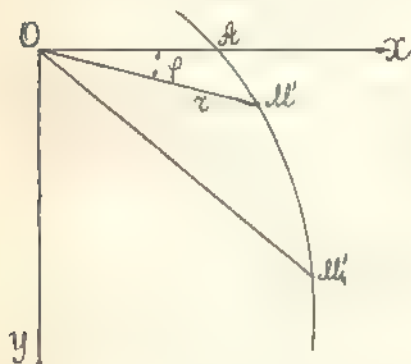
### АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЪРАЖЕНІЕ СЕКТОРИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ.

а) Въ полярныхъ координатахъ.

Точку  $O$  беремъ за полюсъ,  $OA$  за постоянную ось. Координаты точки  $M'$  будутъ (черт.53):

$$r = OM',$$

$$\varphi = \angle AOM'.$$



Секториальная скорость равна производной  $\frac{dS}{dt}$ , но дифференціалъ площади

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

а слѣдовательно, секториальная скорость будетъ:

Чертежъ 53.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} \dots (3)$$

б) Въ прямоугольныхъ координатахъ.

Принимая  $OA$  за ось  $Ox$ , воспользуемся слѣдующими формулами, выражающими полярныя координаты  $\varphi$  и  $r$  черезъ прямоугольныя  $x$  и  $y$ :



координатных осей, напимѣрь, за ось  $OZ$ , и всякую плоскость, ей перпендикулярную, за плоскость  $XOY$ , поэтому изъ предыдущаго вытекаетъ слѣдующее общее предложеніе:

моментъ количества движенія матеріальной точки относительно всякой неподвижной оси равенъ удвоенной и умноженной на массу секторіальной скорости точки въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, предполагая, что радіусъ-векторы проекціи точки проводятся изъ точки пересеченія оси съ плоскостью.

Если секторіальная скорость точки въ нѣкоторый моментъ постоянна:

$$\frac{dv_s}{dt} = A(\text{const}),$$

и если даны начальныя условія:

$$t_0 = 0,$$

$$S_0 = 0,$$

то 
$$S = At,$$

т.е. площадь сектора  $S$  пропорціональна времени, причемъ  $A$  обозначаетъ величину площади, описываемой радіусомъ-векторомъ въ единицу времени, слѣдовательно, когда секторіальная скорость — величина постоянная, площадь, описываемая радіусомъ-векторомъ проекціи точки (въ случаѣ плоскаго движенія — радіусомъ-векторомъ самой движущейся точки) на плоскость въ единицу времени, будетъ сохранять свою величину.

§ 2. "ЗАКОНЪ МОМЕНТОВЪ" или "ЗАКОНЪ ПЛОЩАДЕЙ".

Найдемъ зависимость между моментомъ количества движенія матеріальной точки и моментомъ силы, къ точкѣ приложенной (или равнодѣйствующей силѣ къ точкѣ приложенныхъ, - если ихъ нѣсколько).

Для этого воспользуемся дифференціальными уравненіями движенія точки:

$$\left. \begin{aligned} m\dot{x} &= X, \\ m\dot{y} &= Y, \\ m\dot{z} &= Z. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

Изъ уравненій (5) легко получить такіа уравненія, правая части которыхъ будутъ представлять извѣстныя выраженія моментовъ силы относительно координатныхъ осей:

$$L_x = yZ - zY,$$

$$L_y = zX - xZ,$$

$$L_z = xY - yX.$$

Множимъ третье изъ уравненій (5) на  $y$ , а второе на  $z$ , и послѣднее произведеніе вычитаемъ изъ предидущаго - получаемъ:

$$m(y\dot{x} - z\dot{y}) = yZ - zY.$$

Лѣвая часть этого уравненія есть, какъ легко убѣдиться, производная по времени отъ выраженія  $m(y\dot{x} - z\dot{y})$ ; слѣдовательно, имѣемъ:

$$\frac{d[m(y\dot{x} - z\dot{y})]}{dt} = yZ - zY,$$

или

$$\frac{dL_x}{dt} = L_x.$$

Это уравнение выражает законъ моментовъ относительно оси  $OX$  или законъ площадей въ плоскости  $ZOY$ .

первая производная по времени отъ момента количества движения матеріальной точки относительно оси  $OX$  равна моменту силы, въ точку приложенной, относительно той же оси  $OX$ .

Название: "законъ площадей" слѣдуетъ изъ того, что полученное уравнение намъ даетъ:

$$2m \frac{d\tilde{y}_x}{dt} = L_x,$$

а секторіальная скорость опредѣляетъ измѣненіе нѣкоторой площади.

Такъ какъ всякую неподвижную ось можно принять за ось  $OX$ , то изъ предыдущаго вытекаетъ общее выраженіе "закона моментовъ" или "закона площадей":

первая производная по времени отъ момента количества движения матеріальной точки относительно какой-либо неподвижной оси равна моменту силы, къ точке приложенной, относительно той же оси \*).

Три уравненія:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= L_x, \\ \frac{dL_y}{dt} &= L_y, \\ \frac{dL_z}{dt} &= L_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

---

\*) Законъ площадей можетъ быть выраженъ и въ такой формѣ: умноженная на удвоенную массу точки первая производная по времени отъ ея секторіальной скорости въ какой-либо неподвижной плоскости равна моменту силы, къ ней приложенной, относительно оси, проведенной перпендикулярно къ этой плоскости въ вершинѣ сектора.



выражают законъ моментовъ относительно трехъ координатныхъ осей или законъ площадей въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ.

Мы можемъ построить годографъ момента количества движенія точки ( $\ell$ ) подобно тому, какъ въ Кинематикѣ мы строили годографъ скорости; скорость точки, вычерчивающей этотъ новый годографъ, будетъ имѣть такія проекціи на координатныя оси:

$$\frac{d\ell_x}{dt}, \frac{d\ell_y}{dt}, \frac{d\ell_z}{dt};$$

поэтому уравненія (6) выражаютъ также слѣдующую теорему. скорость точки, вычерчивающей годографъ момента количества движенія матеріальной точки относительно начала координатъ /или относительно какого-либо неподвижнаго центра/ равна по величинѣ и по направленію моменту силы, къ точкѣ приложенной, относительно того же центра.

Разсмотримъ два важныхъ частныхъ случая:

1) когда моментъ силы, приложенной къ точкѣ, относительно одной координатной оси равенъ нулю и

2) когда моментъ силы относительно начала координатъ равенъ нулю, слѣдовательно, когда моменты силъ относительно трехъ координатныхъ осей равны нулю.

*I случай:*

Сила, приложенная къ точкѣ, заключается въ одной плоскости съ неподвижною осью, напримѣръ, съ осью  $Ox$ , т.е. пересѣкаетъ ее или остается ей параллельною. Въ этомъ случаѣ моментъ силы относительно оси  $Ox$  равенъ нулю, т.е.

$$L_x = yZ - zY = 0,$$

а тогда законъ площадей даетъ:

$$\frac{d\ell_x}{dt} = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что моментъ количества движенія относительно оси  $Ox$  величина постоянная:

$$l_x = C_1 (\text{пост.}),$$

или

$$m \cdot (y\dot{x}' - x\dot{y}') = C_1 \quad \dots \quad (7)$$

Постоянная  $C_1$  можетъ быть опредѣлена, если извѣстны начальное положеніе и начальная скорость точки:

$$C_1 = m(y_0 \dot{x}_0' - x_0 \dot{y}_0').$$

Уравненіе (7) представляетъ первый интеграль дифференціальныхъ уравненій движенія и называется *интеграломъ площадей въ плоскости  $YOZ$* .

На основаніи извѣстной зависимости между моментомъ количества движенія относительно оси  $Ox$  и секторіальной скоростью въ плоскости  $YOZ$ , эта послѣдняя будетъ также величиной постоянной:

$$\zeta_{yx} = \frac{C_1}{2m}.$$

Это уравненіе выражаетъ законъ сохраненія площадей въ плоскости  $YOZ$  /см. стр. 149/.

Если моментъ силъ, приложенной къ точкѣ, относительно оси  $Oy$  равенъ нулю, то законъ площадей имѣетъ мѣсто въ плоскости  $ZOX$ .

если

$$L_y - zX - xZ = 0,$$

то

$$\frac{dl_y}{dt} = 0;$$

откуда

$$l_y = C_2 (\text{пост.}),$$

или

$$m(xx' - xy') = C_2 ;$$

следовательно:

$$\tilde{v}_{zx} = \frac{C_2}{2m} .$$

Если моментъ силы, приложенной къ точкѣ, относительно оси  $OZ$  равенъ нулю, то законъ сохранения площадей имѣетъ мѣсто въ плоскости  $XOY$  :

если

$$L_z = xY - yX = 0 ,$$

то

$$\frac{dL_z}{dt} = 0 ;$$

откуда

$$L_z = C_3 \text{ (const.)},$$

или

$$m(xy' - yx') = C_3 \text{ (const.)};$$

следовательно:

$$\tilde{v}_{xy} = \frac{C_3}{2m}$$

Такъ какъ всякую неподвижную ось можно принять за одну изъ координатныхъ осей, напримѣръ, за ось  $OZ$  , а плоскость, ей перпендикулярную, за плоскость  $XOY$  , то изъ сказаннаго вытекаетъ слѣдующая теорема:

если моментъ силы, приложенной къ точкѣ, относительно какой-либо неподвижной оси равенъ нулю \*), то законъ сохранения площадей имѣетъ мѣсто въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, т. е. секторіальная скорость точки въ этой плоскости остается постоянной.

III случай:

На точку дѣйствуетъ центральная сила.

\*) Это будетъ тогда, когда сила, во все время движенія точки, находится въ одной плоскости съ осью.

Если центръ силы приметъ за начало координатъ, то моментъ силы относительно всякой оси, проходящей черезъ начало координатъ, а слѣдовательно, и относительно каждой изъ трехъ координатныхъ осей, будетъ равенъ нулю:

$$L_x=0, L_y=0, L_z=0;$$

а тогда

$$l_x=C_1, l_y=C_2, l_z=C_3.$$

Получаемъ, такимъ образомъ, одновременно три интеграла площадей въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ:

$$\left. \begin{aligned} m(yx' - xy') &= C_1, \\ m(xx' - x'x) &= C_2, \\ m(xy' - yx') &= C_3, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

слѣдовательно, законъ сохраненія площадей имѣетъ мѣсто одновременно въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ:

$$\begin{aligned} \zeta_{yx} &= \frac{C_1}{2m}, \\ \zeta_{xx} &= \frac{C_2}{2m}, \\ \zeta_{xy} &= \frac{C_3}{2m}. \end{aligned}$$

Моментъ количества движенія  $l$  относительно начала координатъ сохраняетъ въ этомъ случаѣ постоянную величину и направление:

$$l = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2};$$

$$\cos(l, x) = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}$$

$$\cos(\ell, y) = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}},$$

$$\cos(\ell, z) = \frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ секторіальная скорость точки въ каждой изъ плоскостей, проходящихъ черезъ начало координатъ, имѣетъ постоянную величину, такъ какъ она равна раздѣленной на  $2m$  величинѣ проекціи момента количества движенія  $\ell$  на перпендикуляръ къ соответствующей плоскости; поэтому законъ сохраненія площадей имѣетъ мѣсто во всякой плоскости, проходящей черезъ начало координатъ; въ каждой такой плоскости существуетъ и интегралъ площадей, но когда плоскость не совпадаетъ ни съ одной изъ координатныхъ плоскостей, то соответствующій интегралъ площадей будетъ слѣдствіемъ трехъ интеграловъ въ координатныхъ плоскостяхъ.

Постоянныя  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , опредѣляются съ помощью начальныхъ данныхъ: при  $t = t_0$  ( $t_0$  обыкновенно  $= 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $z = z_0$ ,  $x' = x'_0$ ,  $y' = y'_0$ ,  $z' = z'_0$ , а именно:

$$C_1 = m(y_0 z'_0 - z_0 y'_0),$$

$$C_2 = m(z_0 x'_0 - x_0 z'_0),$$

$$C_3 = m(x_0 y'_0 - y_0 x'_0).$$

Умножая уравненія (3) соответственно на  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , и складывая, получимъ:

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0;$$

отсюда слѣдуетъ, что при дѣйствіи центральной силы движеніе точки происходитъ въ плоскости ( $C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0$ ), проходящей черезъ начало координатъ (центръ силъ) и перпендикулярной къ направленію момента количества движенія  $\ell$  точки относительно

начала координатъ \*); въ этой плоскости заключается, конечно, и начальная скорость точки \*\*).

Изъ вышеизложеннаго мы заключаемъ, что законъ сохраненія площадей даетъ для дифференціальныхъ уравненій движенія точки: одинъ перемъ интегралъ, если сила, приложенная къ точкѣ, во все время движенія остается въ одной плоскости съ одною изъ координатныхъ осей; и при перемъ интеграла (8), если сила, приложенная къ точкѣ, проходитъ постоянно черезъ начало координатъ.

## Г Л А В А V.

### ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ПРИ ДѢЙСТВІИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ.

#### § 1. Законы площадей и живой силы.

На основаніи закона площадей мы знаемъ, что при дѣйствіи центральной силы точка движется въ плоскости, заключающей центръ силы и начальную скорость точки. Если эту плоскость возьмемъ за плоскость  $ХОУ$ , то будемъ имѣть интегралъ площадей:

$$m(xy' - yx') = C',$$

гдѣ  $C'$  величина постоянная:

$$C' = m(x_0 y'_0 - y_0 x'_0)$$

---

\*) Это видно изъ выраженій *cosinus'овъ* условъ между направленіемъ  $\ell$  и координатными осями.

\*\*) Въ началѣ главы II было уже указано, что при дѣйствіи центральной силы точка описываетъ плоскую прелекторію.



Если обозначимъ черезъ  $r$  и  $\varphi$  полярныя координаты точки въ этой плоскости, тогда будетъ:

$$r^2 \varphi' = C, \dots\dots\dots (1)$$

гдѣ

$$C = \frac{C'}{m}.$$

Законъ живой силы намъ даетъ вообще:

$$d \frac{mv^2}{2} = X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz.$$

Въ случаѣ центральной силы  $F$ , какъ бы она ни выражалась, мы имѣемъ слѣдующія выраженія ея проекцій:

$$X = F \cdot \frac{x}{r},$$

$$Y = F \cdot \frac{y}{r},$$

$$Z = 0.$$

если уловимся приписывать величинѣ силы  $F$  знакъ  $+$ , когда сила отталкивательная, и знакъ  $-$ , когда сила притягательная.

Поэтому элементарная работа будетъ равна:

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = F \cdot \frac{x \cdot dx + y \cdot dy}{r} = F \cdot \frac{d(x^2 + y^2)}{2r} = F \cdot \frac{r \cdot dr}{2r} = F \cdot \frac{dr}{2}$$

и законъ живой силы выражается такъ:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F \cdot dr \dots\dots\dots (2)$$

## § 2. формула Binet.

Такъ какъ въ полярныхъ координатахъ:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2,$$

то уравненіе (2) представится въ видѣ:

$$d\left[\frac{m}{z}(z'^2 + z^2 \varphi'^2)\right] = F dr.$$

Подставляя сюда вмѣсто производной  $\varphi'$  ее значеніе изъ (1):

$$\varphi' = \frac{C}{z^2},$$

получимъ:

$$d\left[\frac{m}{z}\left(z'^2 + \frac{C^2}{z^2}\right)\right] = F dr.$$

Выполнимъ дифференцированіе въ лѣвой части:

$$m(z' dr' - \frac{C^2}{z^3} dz) = F dr. \dots\dots\dots (3)$$

За независимую переменную примемъ уголъ  $\varphi$ , тогда

$$z' = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \varphi' = \frac{C}{z^2} \cdot \frac{dr}{d\varphi} = -C \frac{d(\frac{1}{z})}{d\varphi}.$$

Раздѣлимъ уравненіе (3) на  $d\varphi$ :

$$m\left(z' \frac{dr'}{d\varphi} - \frac{C^2}{z^3} \frac{dr}{d\varphi}\right) = F \frac{dr}{d\varphi}$$

и подставимъ сюда, вмѣсто  $z'$  и  $\frac{dr'}{d\varphi}$ , ихъ значенія:

$$m\left[\frac{C}{z^2} \frac{dr}{d\varphi} \cdot \left(-C \frac{d(\frac{1}{z})}{d\varphi}\right) - \frac{C^2}{z^3} \frac{dr}{d\varphi}\right] = F \frac{dr}{d\varphi}.$$

Если  $z$  не остается постояннымъ, то  $\frac{dr}{d\varphi}$  не равно нулю, и, слѣдовательно, можемъ сократить на  $\frac{dr}{d\varphi}$ ; найдемъ:

$$F = -\frac{mC^2}{z^2} \left(\frac{d(\frac{1}{z})}{d\varphi^2} + \frac{1}{z}\right) \dots\dots\dots (4)$$

Уравненіе (4) есть формула Binet, эта формула позволяетъ между прочимъ, весьма просто по данной траекторіи точки опредѣлить ту центральную силу, подъ вліяніемъ которой точка совершаетъ движеніе.

Замѣтимъ, что изъ уравненія (3), принимая за независимую переменную время  $t$ , мы получимъ:

$$m \left( \dot{r} \cdot \dot{r} - \frac{C^2}{r^3} \cdot r \right) = F \cdot r;$$

отсюда, по сокращеніи на  $r$ , находимъ слѣдующее уравненіе, характеризующее движеніе точки вдоль ея радіуса-вектора:

$$m \left( \dot{r} - \frac{C^2}{r^3} \right) = F,$$

или

$$\dot{r} = \frac{1}{m} \cdot F + \frac{C^2}{r^3} \dots \dots \dots (5)$$

### § 3. Выводъ закона Ньютона изъ законовъ Кеплера.

Законы Кеплера, относящіеся къ движенію планетъ, формулируются слѣдующимъ образомъ:

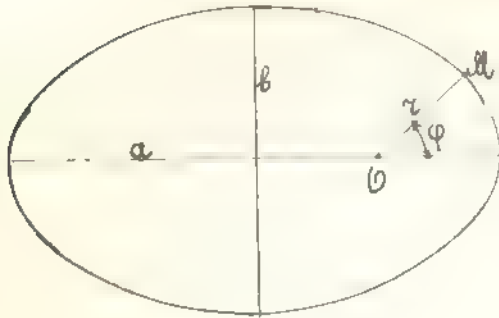
*Первый законъ.* Каждая планета описываетъ эллипсъ, въ фокусѣ котораго находится солнце.

*Второй законъ.* Площади секторовъ, описываемыхъ радіусомъ-векторомъ планеты, пропорціональны времени.

*Третій законъ.* Квадраты времени обращенія планетъ вокругъ солнца пропорціональны кубамъ большихъ полуосей, описываемыхъ ими эллипсовъ.

Обозначимъ радіусъ-векторъ планеты черезъ  $r$  (черт. 54), уголъ, образуемый радіусомъ-векторомъ съ большою осью, черезъ  $\varphi$  полуоси эллипса - большую черезъ  $a$ , малую черезъ  $b$ ; наконецъ, время обращенія планеты вокругъ солнца черезъ  $T$ .

На основаніи перваго закона Кеплера



Чертеж 54

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

если за полярную ось возьмем большую ось эллипса, а за полюс — фокус.

На основаніи втораго закона Кеплера секторіальная скорость величина постоянная, слѣдовательно:

$$r^2 \cdot \varphi' = C (\text{пост.}).$$

Наконецъ, третій законъ Кеплера даетъ намъ слѣдующую зависимость для всѣхъ планетъ:

$$\frac{T^2}{a^3} = \delta,$$

гдѣ  $\delta$  есть величина постоянная, одинаковая для всѣхъ планетъ.

Выведемъ изъ законовъ Кеплера законъ Ньютона. Такъ какъ

$$r^2 \cdot \varphi' = C,$$

(II законъ Кеплера), то моментъ силы  $\mathbf{F}$  относительно полюса  $O$  равенъ нулю, значитъ  $\mathbf{F}$  есть сила центральная, проходящая черезъ солнце.

Силу эту мы можемъ опредѣлить, пользуясь формулою Випетъ, такъ какъ знаемъ (I законъ Кеплера) траекторію планеты.

Изъ уравненія эллипса имѣемъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi),$$

откуда

$$\frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi} = -\frac{e}{p} \sin \varphi.$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} = -\frac{e}{p} \cos \varphi.$$

Подставляя выражения производной  $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2}$  и  $\frac{1}{r}$  въ формулу Binet, получимъ.

$$F = \frac{m}{r^2} \left( -\frac{e}{p} \cos \varphi + \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \varphi \right)$$

или

$$F = \frac{m}{p} \cdot \frac{c^2}{r^2}.$$

Такимъ образомъ, исходя изъ первыхъ двухъ законовъ Кеплера мы нашли, что интересующая насъ сила  $F$  пропорціональна массѣ, обратно пропорціональна квадрату разстоянія, и что эта сила притягательная (послѣднее показываетъ знакъ минусъ въ выраженіи силы  $F$ ).

Разсмотримъ коэффициентъ  $\frac{c^2}{p}$

Хотя входящія въ него величины: удвоенная секторіальная скорость  $c$  и параметръ  $p$  для различныхъ планетъ различны, тѣмъ не менѣе, основываясь на третьемъ законѣ Кеплера, можно доказать, что отношеніе  $\frac{c^2}{p}$  величина постоянная для всѣхъ планетъ.

Въ самомъ дѣлѣ, секторіальная скорость планетъ  $= \frac{1}{2} c$ , а площадь эллипса  $= \pi a b$ , слѣдовательно:

$$\frac{1}{2} c = \frac{\pi a b}{T};$$

откуда

$$c^2 = \frac{4 \pi^2 a^2 b^2}{T^2}.$$

Подставляя сюда вмѣсто малой полуоси ея выраженіе черезъ большую полуось и параметръ  $b^2 = a p$ , получимъ

$$c^2 = \frac{4 \pi^2 a^3 p}{T^2};$$

откуда

$$\frac{c^2}{r^3} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} ;$$

но по третьему закону Кеплера

$$\frac{T^2}{a^3} = \delta ;$$

повтому

$$\frac{c^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\delta} = k .$$

гдѣ  $k$  постоянная величина, одинаковая для всѣхъ планетъ и, слѣдовательно, дѣйствующая сила (сила притяженія къ солнцу) будетъ.

$$F = \frac{k m}{r^2} . . . . . (6)$$

Постоянная  $k$  есть величина той силы притяженія, которую оказываетъ солнце на единицу массы, когда она находится на единицѣ разстоянія.

#### § 4. *Опредленіе движенія планетъ и кометъ подъ вліяніемъ притяженія къ солнцу.*

Въ механикѣ планеты и кометы, когда изучается только движеніе ихъ вкругъ солнца, рассматриваются какъ матеріальныя точки, поэтому наша задача состоитъ въ слѣдующемъ опредѣлить движеніе матеріальной точки подъ вліяніемъ центральной притягательной силы, пропорціональной массѣ и обратно пропорціональной квадрату разстоянія точки отъ центра силы.

Если центральную силу обозначимъ черезъ  $F$ , массу точки черезъ  $m$ , величину силы притяженія единицы массы на единицѣ разстоянія черезъ  $k$ , то величина силы будетъ



$$F = -\frac{k m}{r^2}.$$

Въ разсматриваемомъ случаѣ нѣтъ надобности опредѣлять движеніе по общему пріему, т.е. составлять сначала дифференціальныя уравненія движенія, такъ какъ здѣсь имѣются исто и законъ сохраненія живой силы и законъ сохраненія площадей, слѣдовательно, могутъ быть написаны два интеграла. *интегралъ живой силы и интегралъ площадей.*

Сила  $F$ , какъ сила центральная и зависящая только отъ разстоянія, имѣетъ потенціалъ, и силоная функція для нея будетъ:

$$u = \int \frac{k m}{r^2} dr = \frac{k m}{r};$$

слѣдовательно, интегралъ живой силы выразится уравненіемъ

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{k m}{r} + h_1,$$

гдѣ  $h_1$  постоянная произвольная. Помножимъ обѣ части равенства на  $\frac{2}{m}$ , получимъ:

$$v^2 = \frac{2k}{r} + h, \dots \dots \dots (7)$$

гдѣ  $h = \frac{2 h_1}{m}$ .

Интегралъ площадей выразится такъ:

$$r^2 \varphi' = C \dots \dots \dots (8)$$

Постоянная произвольная  $h$  и  $C$  мы опредѣлимъ съ помощью *начальнаго положенія и начальной скорости точки*, т.е. зная, что въ моментъ  $t_0 = 0$ ,  $r = r_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  (черт. 55) (ничто намъ не мѣшаетъ считать  $\varphi_0 = 0$ ); и, кромѣ того,  $v = v_0$  и  $(\hat{v}_0, \hat{r}_0) = \delta$  или  $r' = r'_0$  и  $\varphi' = \varphi'_0$ .

Подставляя начальныя значенія въ уравненія (7) и (8), получимъ:

$$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0},$$

$$C = r_0^2 \varphi'_0.$$

или, такъ какъ

$$r^2 \varphi' = r r' \varphi' = r v \sin(\sigma, r),$$

то

$$C = r_0 v_0 \sin(\sigma_0, r_0) = r_0 v_0 \sin \delta.$$

Считая  $h$  и  $C$  величинами известными, определимъ траекторию движущейся точки, т. е. найдемъ зависимость между  $r$  и  $\varphi$ .

На основаніи уравненія (7), выражая квадратъ скорости въ полярныхъ координатахъ, получимъ.

$$r'^2 + r^2 \varphi'^2 = \frac{2k}{r} + h \dots \dots \dots (7')$$

Очевидно

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \varphi'$$

но изъ уравненія (8) выйдемъ:

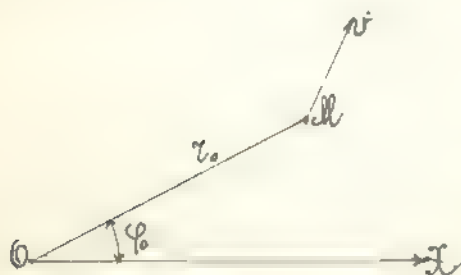
$$\varphi' = \frac{C}{r^2};$$

слѣдовательно:

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{C}{r^2}.$$

Подставляя въ уравненіе (7') вмѣсто  $r'$  и  $\varphi'$  ихъ значенія, получимъ:

$$\frac{C^2}{r^4} \left( \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \frac{C^2}{r^4} = \frac{2k}{r} + h \dots \dots \dots$$



Чертежъ 55.

Откуда выйдемъ:

$$\frac{C}{r^4} \frac{dr}{d\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2k}{r} + h - \frac{C^2}{r^4}} \dots \dots \dots (8)$$

Исследуемъ вопросъ о томъ, какой знакъ надо брать передъ радикаломъ.

Мы всегда можемъ отсчитывать уголъ  $\varphi$  въ такую сторону, чтобы было  $\varphi_0 > 0$ , тогда  $C > 0$ . Такъ какъ  $C > 0$ , то знакъ лѣвой части уравненія (8) опредѣляется знакомъ  $\frac{dr}{d\varphi}$ , но

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r'}{\varphi'} = \frac{r^2}{C} r',$$

откуда слѣдуетъ, что знакъ  $\frac{dr}{d\varphi}$  въ своею очередь опредѣляется знакомъ производной  $r'$ , которая можетъ быть положительной, отрицательной или равной нулю.

Очевидно, если  $r'_0 > 0$ , то передъ корнемъ мы должны взять знакъ + если  $r'_0 < 0$ , то знакъ минусъ. Если же  $r'_0 = 0$  (это будетъ тогда, когда  $v_0 \perp r_0$ ), то о знакѣ передъ радикаломъ мы должны судить по знаку второй производной отъ  $r$  въ начальный моментъ.

Мы видѣли, что

$$r'' = -\frac{k}{r^2} + \frac{C^2}{r^3},$$

слѣдовательно, если

$$-\frac{k}{r_0^2} + \frac{C^2}{r_0^3} > 0,$$

то беремъ передъ корнемъ знакъ плюсъ, если

$$\frac{k}{r_0^2} + \frac{C^2}{r_0^3} < 0,$$

то знакъ минусъ. Если же

$$-\frac{k}{r_0^2} + \frac{C^2}{r_0^3} = 0,$$

тогда все производная отъ  $r$  по времени въ начальный моментъ будутъ равны нулю\*); принимая во вниманіе разложеніе  $r$  въ

\*) Действительно, изъ выраженія для  $r''$  следуетъ, что

$$r_0'' = f(r_0) r_0',$$

т. е.

$$f(r) = \frac{k}{r^2} - \frac{C^2}{r^3};$$

рядъ:

$$r = r_0 + r'_0(t-t_0) + \frac{1}{2} r''_0(t-t_0)^2 + \frac{1}{6} r'''_0(t-t_0)^3 + \dots$$

мы можемъ утверждать, что  $r$  во все время будетъ оставаться постояннымъ, т.е. равнымъ  $r_0$ ; въ этомъ случаѣ точка описываетъ окружность.

Положимъ, что, руководствуясь указанными соображеніями, мы выбрали въ нашемъ случаѣ знакъ + . тогда изъ уравненія (8) получаемъ:

$$\frac{C dr}{r^2 \sqrt{\frac{2k}{r} + h - \frac{C^2}{r^2}}} = d\varphi.$$

Возьмемъ интегралъ отъ обѣихъ частей этого равенства:

$$\int \frac{C dr}{r^2 \sqrt{\frac{2k}{r} + h - \frac{C^2}{r^2}}} = \varphi - \alpha, \quad (8')$$

гдѣ  $\alpha$  — постоянная произвольная, опредѣляемая по начальнымъ даннымъ.

Обозначимъ

$$\frac{1}{r} = u;$$

тогда уравненіе (8') имѣетъ видъ:

$$\int \frac{C du}{\sqrt{2ku + h - C^2 u^2}} = \varphi - \alpha.$$

но

$$r'_0 = 0,$$

следовательно, и

$$r''_0 = 0;$$

точно такъ же все производныя послѣдующихъ высшихъ порядковъ въ начальный моментъ будутъ равны нулю, такъ какъ они выражаются въ виде суммъ произведеній, изъ которыхъ каждое содержитъ множителемъ производныя предшествующихъ низшихъ порядковъ

Подрадикальную функцію перепишемъ слѣдующимъ образомъ:

$$2ku + h - Cu^2 = h + \frac{k^2}{C^2} - (Cu - \frac{k}{C})^2 =$$

$$= h + \frac{k^2}{C^2} - (Cu - \frac{k}{C})^2;$$

тогда

$$\int \frac{C \cdot du}{\sqrt{h + \frac{k^2}{C^2} - (Cu - \frac{k}{C})^2}} = \varphi - \alpha;$$

выполнивъ интегрирование находитъ

$$\arccos \frac{Cu - \frac{k}{C}}{\sqrt{h + \frac{k^2}{C^2}}} = \varphi - \alpha;$$

откуда

$$Cu - \frac{k}{C} = \sqrt{h + \frac{k^2}{C^2}} \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

и

$$u = \frac{k}{C^2} + \frac{1}{C} \sqrt{h + \frac{k^2}{C^2}} \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

Введемъ обозначенія:

$$\frac{C}{k} = p,$$

и

$$(\frac{1}{C} \sqrt{h + \frac{k^2}{C^2}}) \cdot \frac{C}{k} = e,$$

или проще

$$e = \sqrt{1 + \frac{h \cdot C^2}{k^2}}$$

Тогда имѣемъ.

$$\frac{1}{2} \tau = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\varphi - \alpha)]$$

и окончательный видъ уравненія траекторіи будетъ.

$$\tau = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} \dots \dots \dots (9)$$

Если бы передъ радикаломъ въ уравненіи (8) пришлось бы

взять знак  $-$ , то этот минус мы могли бы перенести в правую часть равенства и тогда послѣ интегрированія мы получили бы  $(-\varphi)$ , вмѣсто  $\varphi$ . Беря при этомъ постоянную произвольную  $+\alpha$  получимъ тоже уравненіе (9)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \alpha_1)} = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \alpha_1)}$$

Траекторія точки, выражаемая уравненіемъ (9), есть эллипсъ, когда  $e < 1$ , парабола, когда  $e = 1$ , гипербола, когда  $e > 1$ .

Величина  $e$  зависитъ отъ знака передъ  $h$ ;  $e < 1$ , когда  $h < 0$ , но

$$h = v_0^2 - \frac{2k}{r_0};$$

значитъ точка описываетъ эллипсъ, когда

$$v_0^2 < \frac{2k}{r_0},$$

т. е. когда

$$v_0 < \sqrt{\frac{2k}{r_0}};$$

точка описываетъ параболу, когда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$$

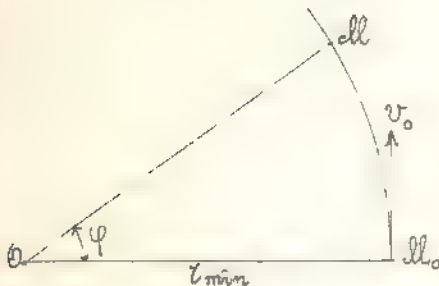
и гипербола, когда

$$v_0 > \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$$

Такимъ образомъ, все различіе траекторій обуславливается величиною скорости точки въ начальный моментъ.

Планеты движутся по эллипсамъ, кометы большею частью по параболамъ; изъ интеграла живой силы

$$v^2 = \frac{2k}{r} + h$$



Чертежъ 56.



ясно, что во всякомъ положеніи планеты скорость  $v < \sqrt{\frac{2k}{r}}$ ; во всякомъ положеніи кометы, описывающей параболу,  $v = \sqrt{\frac{2k}{r}}$ .

Изъ формулы (3) легко видѣть, что  $r$  получаетъ наименьшее значеніе, когда  $\varphi = \alpha$ , значить  $\alpha$  есть то значеніе  $\varphi$ , которое соотвѣтствуетъ наименьшему разстоянію движущейся точки отъ притягивающаго центра\*)

Если будемъ отсчитывать  $\varphi$  отъ наименьшаго радіуса-вектора  $OM$  (черт. 56), то  $\alpha = 0$ , и уравненіе траекторіи будетъ:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (9)$$

Перейдемъ къ опредѣленію того закона, по которому точка движется по найденной уже траекторіи

Законъ этотъ можно опредѣлить двоякимъ способомъ, выразивъ или  $r$ , или  $\varphi$ , какъ функціи отъ времени.

Мы найдемъ выраженіе угла  $\varphi$ , какъ функціи отъ времени.

Подставляя въ уравненіе (9) вмѣсто  $r$  его значеніе изъ уравненія (9), получимъ

$$\frac{p^2}{(1 + e \cos \varphi)^2} \varphi' = C,$$

или

$$\frac{p^2 d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = C dt.$$

Возьмемъ интегралъ отъ обѣихъ частей равенства

$$\int \frac{p^2 d\varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} = C(t - \tau),$$

гдѣ  $\tau$  — постоянная произвольная.

Интеграль лѣвой части находится просто, когда траекторія точки парабола; тогда онъ равенъ:

\*) Ближайшее къ солнцу положеніе планеты или кометы называется "перигелий".

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2} \int \frac{d\varphi}{(1+e \cdot \cos \varphi)^2} &= \frac{p^2}{2} \int \frac{d\varphi}{1+\cos \varphi} = \frac{p^2}{2} \int \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}} = \frac{p^2}{2} \int (1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}) d\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \\ &= \frac{p^2}{2} (\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}). \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, искомая зависимость выражается формулой.

$$\frac{p^2}{2} (\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}) = C(t - \tau), \quad (10)$$

гдѣ

$$\frac{2C}{p^2} = \frac{2\sqrt{k}}{p^{\frac{3}{2}}}$$

Изъ этого уравненія слѣдуетъ, что когда  $r^2 \dot{\varphi} = C$ , т. е. когда точка  $M$  находится ближе всего къ притягивающему центру, то

$$t = \tau,$$

значитъ,  $\tau$  есть время прохожденія кометы черезъ перигелій.

Когда траекторія точки эллипса или гипербола, интегрированіе сложнее. Однако для эллипса можно найти законъ движенія другимъ, довольно простымъ путемъ.

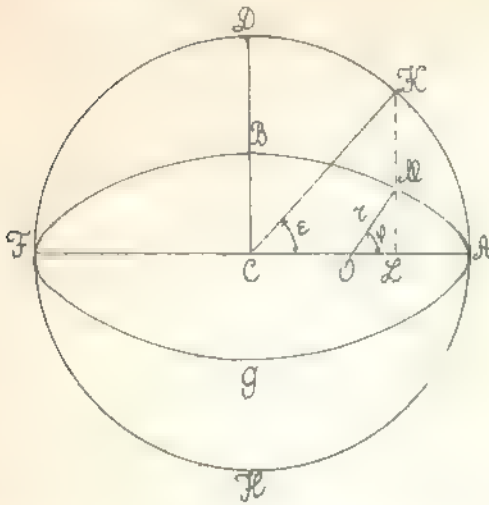
Такъ какъ  $r^2 \dot{\varphi} = C$ , то площадь сектора, описываемая радиусомъ-векторомъ точки, будетъ

$$S = \frac{C}{2} (t - \tau), \quad (11)$$

гдѣ  $\tau$  есть время прохожденія планеты черезъ перигелій. Площадь  $S$  въ уравненіи (11) выражена въ функціи отъ времени, поэтому, если мы сумѣемъ найти зависимость между  $S$  и  $\varphi$ , то задача наша будетъ рѣшена.

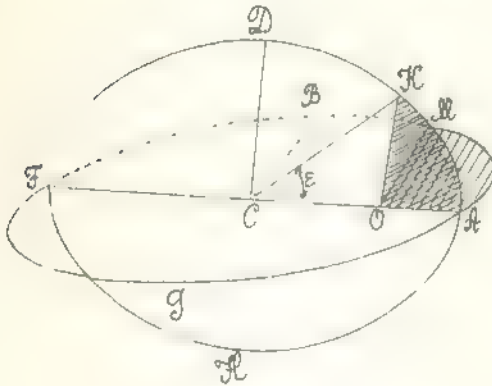
Мы увидимъ, что вмѣсто угла  $\varphi$  намъ будетъ удобно ввести другой уголъ  $\varepsilon$ , получаемый слѣдующимъ построеніемъ: опишемъ изъ центра эллипса  $C$  (черт. 57) радиусомъ, равнымъ большой полуоси, окружность  $MDS$  и черезъ точку  $M$  проведемъ прямую  $ML \perp CA$  до пересѣченія съ окружностью въ точкѣ  $K$  соедин-

ная точку  $K$  съ  $C$ , получимъ уголъ  $KCA$ , который и обозначимъ буквою  $\varepsilon$ .



Чертежъ 57.

диаметра (черт.58)  $AK$  такъ, что проекція радиуса  $CD$  (перпендикулярнаго къ диаметру  $AK$ ) этой окружности на плоскость эллипса совпадаетъ съ малой полуосью эллипса  $CB$ .



Чертежъ 58.

секторъ  $S = \pi R^2 AOK$  представляетъ проекцію сектора  $AOK$  на плоскость эллипса.

Площадь сектора  $AOK$  равна:

$$\pi R^2 AOK = \pi R^2 OCK - \frac{1}{2} a^2 \varepsilon - \frac{1}{2} a^2 \sin \varepsilon,$$

Уголъ  $\varphi$  называется истинною аномаліею, а уголъ  $\varepsilon$  эксцентрическою аномаліею.

Будемъ рассматривать эллипсъ  $AKB$ , какъ проекцію построеннаго нами круга  $ADK$ , (диаметръ котораго равенъ большой оси эллипса), предполагая, что кругъ повернуть около

Точка  $M$  будетъ тогда проекціей точки окружности  $K$ .

Выразимъ площадь сектора  $S = \pi R^2 AOK$  не въ функціи отъ угла  $\varphi$ , а въ функціи отъ угла  $\varepsilon$ . Очевидно,

ибо  $\angle C = \alpha \varepsilon$ . Помножимъ эту площадь на  $\cos$  угла  $\angle CD$  (между плоскостями окружности и эллипса), равный отношенію  $\frac{b}{a}$ . получимъ:

$$S = \pi \cdot R \cdot O M = \frac{\pi^2}{2} \cdot (\varepsilon - e \sin \varepsilon) \cdot \frac{b}{a} = \frac{\pi^2}{2} \cdot (\varepsilon - e \sin \varepsilon).$$

На основаніи уравненія (11)

$$\frac{\pi^2}{2} \cdot (\varepsilon - e \sin \varepsilon) = \frac{C}{2} (t - \tau),$$

откуда

$$\varepsilon - e \sin \varepsilon = \frac{C}{\pi b} (t - \tau).$$

Такъ какъ

$$b^2 = ap,$$

то

$$\frac{C}{\pi b} = \frac{C}{\pi^2 \sqrt{p}},$$

но у насъ

$$\sqrt{p} = \frac{C}{\sqrt{k}};$$

слѣдовательно:

$$\frac{C}{\pi b} = \frac{\sqrt{k}}{\pi^2 a^{3/2}}$$

и искомая зависимость выразится формулой

$$\varepsilon - e \sin \varepsilon = \frac{\sqrt{k}}{a^{3/2}} (t - \tau) \dots \dots \dots (12)$$

Нетрудно найти зависимость между углами  $\varepsilon$  и  $\varphi$  изъ чертежа (57):

$$X L = \sqrt{a^2 - x^2},$$

и

$$M L = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

слѣдовательно:

$$X L = \frac{a}{b} M L;$$

но

$$X L = a \sin \varepsilon,$$

$$M\dot{\varphi} = r \sin \varphi = \frac{b \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi},$$

слідовательно

$$\sin \epsilon = \frac{b}{a} \frac{\sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} = \frac{b}{a} \frac{\sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}.$$

Для случая гиперболы, какъ менѣе важнаго, мы не будемъ искать выраженія угла  $\varphi$  въ функціи отъ времени

Разсмотрѣнная въ настоящемъ параграфѣ задача можетъ служить *примѣромъ* для рѣшенія всякой задачи, въ которой требуется опредѣлить движеніе матеріальной точки подъ вліяніемъ центральной силы, выражающейсѧ нѣкоторою функціею разстоянія.

Планъ рѣшенія слѣдующій. 1) составленіе двухъ интеграловъ живой силы и площадей, 2) опредѣленіе постоянныхъ произвольныхъ въ этихъ интегралахъ по начальнымъ даннымъ, 3) опредѣленіе траекторіи точки. 4) опредѣленіе закона движенія точки по траекторіи, т.е. выраженіе одной изъ координатъ точки:  $r$  или  $\varphi$  въ функціи отъ времени.

## Г Л А В А VI.

### ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ.

#### § 1. Условія для скорости и ускоренія точки

Всякая неподвижная поверхность выражается уравненіемъ вида:

$$f(x, y, z) = 0. \quad (1)$$

связывающимъ координаты точки.

Поверхность, по которой движется точка, можетъ быть или

реальная, напимѣрь, поверхность шара, или только воображаемая, геометрическая; — такъ напимѣрь, точка  $M$ , соединенная съ неподвижною точкою  $O$  посредствомъ стержня длины  $\ell$ , движется по геометрической поверхности шара радиуса  $\ell$  \*).

Скорость и ускореніе точки, движущейся по данной поверхности, подчинены нѣкоторымъ условіямъ.

Чтобы вывести эти условія, замѣтимъ, что уравненіе поверхности (1) обратится въ тождество, если мы вмѣсто координатъ точки подставимъ ихъ выраженія въ функціяхъ времени; а если функція тождественно равна нулю, то и всѣ ея производныя по времени равны нулю:

$$\frac{df}{dt} = 0; \quad \frac{d^2f}{dt^2} = 0; \quad \dots \quad \text{и т. д.}$$

Раскрывая первую производную, получимъ условіе, которому должны удовлетворять проекціи скорости точки, движущейся по поверхности:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot z' = 0 \quad (2)$$

Этому условію легко придать простую геометрическую форму. Проведемъ въ точкѣ  $M$  къ поверхности (черт. 59) нормаль  $MM'$ , одно направленіе которой считается положительнымъ, другое отрицательнымъ. Сосѣдств'я угловъ, образуемыхъ нормалью съ осями координатъ, будутъ:

$$\cos(X, X) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f},$$

$$\cos(X, Y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f},$$

---

\*) Поверхность, наз. "удерживающею", если точка не можетъ съ нея сойти, и "неудерживающею", если точка можетъ сойти въ одну сторону.



гдѣ

$$\cos(X, X) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f},$$

$$\Delta f = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} ;$$

причемъ положительному направленію нормали соответствуетъ корень со знакомъ плюсъ, а отрицательному со знакомъ минусъ.



Чертеж 59.

Раздѣляя обѣ части уравненія (2) на  $\Delta f$ , получимъ:

$$x' \cos(X, X) + y' \cos(X, Y) + z' \cos(X, Z) = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что проекція скорости на направленіе нормали равна нулю

$$v \cos(v, X) = 0. \dots \dots \dots (2)$$

Значить, или  $v = 0$ , но тогда точка находится въ покоѣ или, если точка движется, то

$$\cos(v, X) = 0,$$

т.е.

$$\angle(v, X) = 90^\circ,$$

или

$$v \perp X.$$

Такимъ образомъ, условіе (2) выражаетъ только то, что скорость точки, движущейся по поверхности, перпендикулярна къ нормали, т.е. направлена въ плоскости, касательной къ поверхности, что очевидно.

Раскрывая вторую производную:  $\frac{d^2 f}{dt^2}$ , получимъ условіе, которому должны удовлетворять проекціи ускоренія:

$$f'' + \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' = 0; \dots \dots \dots (4)$$

гдѣ  $f^{(2)}$  есть функція второй степени относительно проекцій

скорости и представляет краткое обозначение совокупности остальных членовъ выраженія второй производной, такъ что

$$f^{(2)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot x'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot y'^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot x'^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cdot x' y' + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \cdot y' x' + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} \cdot x' x'.$$

Если обѣ части уравненія (4) раздѣлимъ на  $\Delta f$ , то получимъ условіе для ускоренія въ болѣе простой формѣ:

$$x'' \cos(\mathcal{X}, X) + y'' \cos(\mathcal{X}, Y) + z'' \cos(\mathcal{X}, Z) = - \frac{f^{(2)}}{\Delta f},$$

откуда

$$x'' \cos(\mathcal{X}, X) = - \frac{f^{(2)}}{\Delta f} \dots \dots \dots (5)$$

## § 2. Реакція поверхности и дифференціальныя уравненія движенія точки.

Реальная поверхность можетъ быть гладкая или негладкая. Разсмотримъ прежде всего случай гладкой поверхности; это будетъ также случай той поверхности, которую мы въ предыдущемъ параграфѣ назвали геометрическою.

Въ статикѣ нами установленъ принципъ, въ силу котораго присутствіе опоръ, стѣсняющихъ свободу тѣла, всегда можетъ быть замѣнено присоединеніемъ къ даннымъ силамъ, действующимъ на тѣло, нѣкоторыхъ новыхъ силъ, названныхъ реакціями опоръ.

Когда точка движется по гладкой поверхности, то эта поверхность представляетъ опору, реакція которой направлена по нормали къ поверхности. Если величину реакціи обозначимъ черезъ  $R$ , условившись приписывать ей знакъ +, когда она направлена по положительной нормали, и знакъ -, когда она направлена по отрицательной нормали, то можемъ выразить проекціи реакціи на координатныя оси слѣдующимъ образомъ:

$$R \cos(R, X) = R \cos(X, X) = \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$R \cos(R, Y) = R \cos(X, Y) = \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$R \cos(R, Z) = R \cos(X, Z) = \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z},$$

гдѣ

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

Такъ какъ ускореніе точки, умноженное на массу, должно быть и по величинѣ и по направленію равно равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло: сложившей съ реакціей поверхности, то дифференціальныя уравненія движенія точки по гладкой поверхности  $\varphi(x, y, z) = 0$  будутъ

$$\left. \begin{aligned} mx'' &= X + \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ my'' &= Y + \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ mz'' &= Z + \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

гдѣ  $X, Y, Z$  суть проекціи равнодѣйствующей приложенныхъ къ тѣлу заданныхъ силъ на координатныя оси \*).

Найденныя уравненія (6) вмѣстѣ съ уравненіемъ (1) позво-

\*) Необходимость появленія вторыхъ членовъ въ правыхъ частяхъ уравненій (6) вытекаетъ уже изъ того, что проекціи ускоренія движущейся точки должны удовлетворять уравненію (4), следовательно, если бы не было этихъ вторыхъ членовъ, то и проекціи данной силы  $X, Y, Z$  должны были бы удовлетворять соответствующему условію что, вообще говоря, невозможно, такъ какъ проекціи данной силы могутъ быть заданы какъ угодно.

ляють намъ рѣшити двѣ задачи, которыя здѣсь представляются:  
1) опредѣлить движеніе точки по поверхности, 2) опредѣлить реакціи поверхности.

Въ первой задачѣ нужно найти координаты  $x, y, z$  въ функции времени, во второй задачѣ величину  $R$ , для опредѣленія этихъ четырехъ неизвѣстныхъ послужатъ намъ имѣющіяся у насъ четыре уравненія три дифференціальныя уравненія (6) и уравненіе поверхности (1).

Общій методъ для опредѣленія движенія точки по поверхности состоитъ въ слѣдующемъ: исключая реакцію  $R$  изъ уравненій (6) получимъ два уравненія:

$$\frac{m\dot{x} - X}{\frac{\partial L}{\partial x}} = \frac{m\dot{y} - Y}{\frac{\partial L}{\partial y}},$$

$$\frac{m\dot{x} - X}{\frac{\partial L}{\partial x}} = \frac{m\dot{z} - Z}{\frac{\partial L}{\partial z}};$$

затѣмъ, пользуясь уравненіемъ поверхности, одну изъ координатъ выражаемъ черезъ двѣ другія, наприимѣръ,  $z$  черезъ  $x$  и  $y$ , и полученныя выраженія подставляемъ въ два вышенаписанныхъ уравненія, - получаемъ два дифференціальныя уравненія второго порядка, нахсдимъ далѣе четыре интеграла этихъ уравненій, при чемъ войдутъ четыре постоянныхъ произвольныхъ; значенія этихъ постоянныхъ опредѣлимъ, зная начальныя данныя:  $x_0, y_0, x'_0, y'_0$ , найдя координаты  $x$  и  $y$  какъ функціи отъ времени  $t$ , легко уже получимъ и  $z$ .

Какъ и въ случаѣ свободной точки, большую пользу намъ здѣсь приносятъ законъ живой силы и законъ сохраненія площадей.

### § 3. Интегралы живой силы и площадей

Применимъ законъ живой силы къ движенію точки по поверхности

$$d\frac{mv^2}{2} = F_1 ds \cos(F, v),$$

гдѣ  $F_1$  равнодѣйствующая задаваемыхъ силъ (равнодѣйствующая этихъ силъ  $F$ ) и реакціи  $R$ .

Знаемъ, что работа этой равнодѣйствующей:

$$F_1 ds \cos(F_1, v) = F ds \cos(F, v) + R ds \cos(R, v);$$

но такъ какъ реакція направлена по нормали, а скорость точки перпендикулярна къ нормали, то  $\cos(R, v) = 0$  и слѣдовательно, элементарная работа реакціи поверхности равна нулю. Значитъ уравненіе, выражающее бесконечно-малое приращеніе живой силы для точки, движущейся по гладкой поверхности, будетъ совершенно такое же, какъ и для точки свободной.

$$d\frac{mv^2}{2} = F ds \cos(F, v);$$

откуда, если данныя силы имѣютъ потенціалъ, тогда элементарная работа равна дифференціалу силовой функціи  $U$ :

$$F ds \cos(F, v) = X dx + Y dy + Z dz = dU,$$

и интегралъ живой силы будетъ:

$$\frac{mv^2}{2} = U - h \dots \dots \dots (7)$$

Такимъ образомъ, если данныя силы, приложенныя къ точкѣ, движущейся по гладкой поверхности, имѣютъ потенціалъ, то существуетъ интегралъ живой силы, который выражаетъ законъ со-

храненія полной энергіи точки, постоянная

$$h \cdot \frac{m \cdot v_a^2}{2} = U(x_0, y_0, z_0).$$

Законъ площадей даетъ намъ интеграль тогда, когда моментъ равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, относительно нѣкоторой оси равенъ нулю, это имѣетъ мѣсто, если упомянутая равнодѣйствующая будетъ все время параллельна нѣкоторой оси или будетъ ее пересѣкать.

Разсматривая движеніе точки по поверхности, мы должны имѣть въ виду равнодѣйствующую данныхъ силъ и реакціи, слѣдовательно, сумму моментовъ данныхъ силъ и реакціи.

Существуетъ одинъ важный случай, гдѣ напередъ можно сказать, что моментъ реакціи относительно нѣкоторой оси равенъ нулю. Такой случай представляется тогда, когда данная поверхность есть *поверхность вращенія*, т.е. поверхность, полученная вращеніемъ нѣкоторой плоской кривой  $AB$  вокругъ оси  $AB$  (черт. 60), лежащей въ ея плоскости. Нормаль къ поверхности вращенія, а слѣдовательно, и направленная по ней реакція, всегда или пересѣкаетъ ось поверхности или ей параллельна.

Въ томъ и другомъ случаѣ моментъ реакціи относительно оси



Чертежъ 60.

вращенія равенъ нулю. Если для точки, движущейся по поверхности вращенія, данная сила, къ ней приложенная, будетъ или пересѣкать ось поверхности, или будетъ ей параллельна, тогда



и моментъ данной силы относительно этой оси равенъ нулю

Такимъ образомъ, если точка движется по гладкой поверхности вращения, то существуютъ интегралы площадей въ плоскости, перпендикулярной къ оси поверхности, если только данная сила все время находится въ одной плоскости съ этой осью

Примемъ ось поверхности  $AB$  за ось  $OZ$ , тогда плоскость перпендикулярная къ ней, будетъ  $XOY$ , и интегралъ площадей выразится такъ

$$xy' - yx' = \text{const.},$$

или въ полярныхъ координатахъ.

$$r^2 \varphi' = \text{const.}$$

#### § 4. Определение реакции или давления.

Для опредѣленія реакции существуетъ два способа.

Первый способъ примѣняется тогда, когда движеніе точки опредѣлено, т.е. когда  $x$ ,  $y$ ,  $z$  мы уже выразили въ функціяхъ отъ времени  $t$ . Беремъ одно изъ дифференціальныхъ уравненій (6), содержащее  $R$ , подставляемъ въ него, вмѣсто координатъ, найденныя выраженія и находимъ  $R$ , какъ функцію времени. Если, напримѣръ, возьмемъ первое изъ уравненій (6), то реакція будетъ:

$$R = (m\ddot{x} - X) \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x}}{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}}.$$

Если величина  $R$  получается со знакомъ  $+$ , то реакція направлена по положительной нормали; если со знакомъ  $-$ , то по отрицательной.

Второй способъ примѣняется тогда, когда движеніе неопредѣлено. Беремъ уравненіе (4), выражающее условіе, которому удо-

влетворяютъ проекціи ускоренія точки, подставляя въ это уравненіе вмѣсто вторыхъ производныхъ ихъ выраженія изъ уравненій (6), получимъ

$$\frac{1}{m} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z \right\} + \frac{R}{m \Delta f} \left\{ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right\} + f^{(2)} = 0.$$

Принимая во вниманіе, что

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 = (\Delta f)^2,$$

находимъ реакцію, выраженную черезъ координаты и скорость

$$R = -\frac{1}{\Delta f} \left( \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial y} Y + \frac{\partial f}{\partial z} Z \right) - \frac{m f^{(2)}}{\Delta f}$$

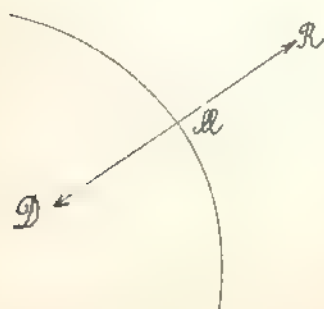
или

$$R = F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{N}) - \frac{m f^{(2)}}{\Delta f}$$

и

$$\Delta f = + \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}$$

гдѣ  $\mathbf{N}$  направленіе положительной нормали. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ изъ полученнаго такимъ образомъ выраженія  $R$  удастся скорость исключить съ помощью интеграла живой силы, и тогда находимъ величину реакціи, какъ функцію отъ координатъ точки.



Чертежъ 61.

По одному изъ принятыхъ нами принциповъ всякому дѣйствию соотвѣтствуетъ равное и противоположно направленное противодѣйствіе, значитъ, если поверхность оказываетъ на точку реакцію  $R$ , то, обратно, точка  $M$  оказываетъ на поверхность некоторую силу  $D$

равную и противоположную  $R$ . Эта сила называется *давлениемъ* точки на поверхность. Очевидно, способы для опредѣленія *давления и реакціи* совершенно одинаковы.

### § 5. ЗАДАЧА.

*Первая задача.* Разсмотримъ движеніе тяжелой точки по гладкой плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ  $\alpha$ .

Примемъ эту плоскость за плоскость  $XOY$  (черт. 62), тогда уравненіе ея будетъ:

$$z = 0 ;$$

ось  $OX$  направлена перпендикулярно къ прямой  $AB$  пересѣченія наклонной плоскости съ плоскостью горизонтальной, т.е. по линіи наибольшаго ската. Начальныя условія будутъ

$$t_0 = 0 ; x_0, y_0, z_0 = 0 ; x'_0, y'_0, z'_0 = 0 .$$

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія:

$$\left. \begin{aligned} mx'' &= mg \cdot \sin \alpha, \\ my'' &= 0, \\ mz'' &= -mg \cos \alpha + R. \end{aligned} \right\} \quad \dots (6')$$

Можно было предвидѣть, что  $R$  войдетъ только въ третье изъ уравненій (6'), такъ какъ реакція направлена по нормали къ плоскости  $XOY$ .

Первое изъ уравненій (6') намъ даетъ:

$$x' = g \cdot \sin \alpha \cdot t + C ;$$

но по начальнымъ даннымъ.

$$C = x_0.$$

слѣдовательно:

$$x' = g \sin \alpha t + x_0',$$

откуда

$$x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + x_0' t + D,$$

гдѣ

$$D = x_0;$$

слѣдовательно:

$$x = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + x_0' t + x_0 \dots \dots \dots (*)$$

Второе изъ уравненій (6) намъ даетъ:

$$y'' = 0;$$

слѣдовательно,  $y' = C$ , или  $y' = y_0'$

$$y = y_0' t + D_1;$$

но

$$D_1 = y_0,$$

слѣдовательно:

$$y = y_0' t + y_0 \dots \dots \dots (*) (*)$$

Уравненія (\*) и (\*) (\*) опредѣляютъ движеніе тяжелой точки по гладкой наклонной плоскости; они, какъ видимъ, отличаются отъ уравненій для движенія свободной матеріальной точки при дѣйствіи силы тяжести только тѣмъ, что вмѣсто ускоренія  $g$  здѣсь входятъ  $g \sin \alpha$ .

Третье изъ уравненій (6') опредѣляетъ реакцію. Такъ какъ

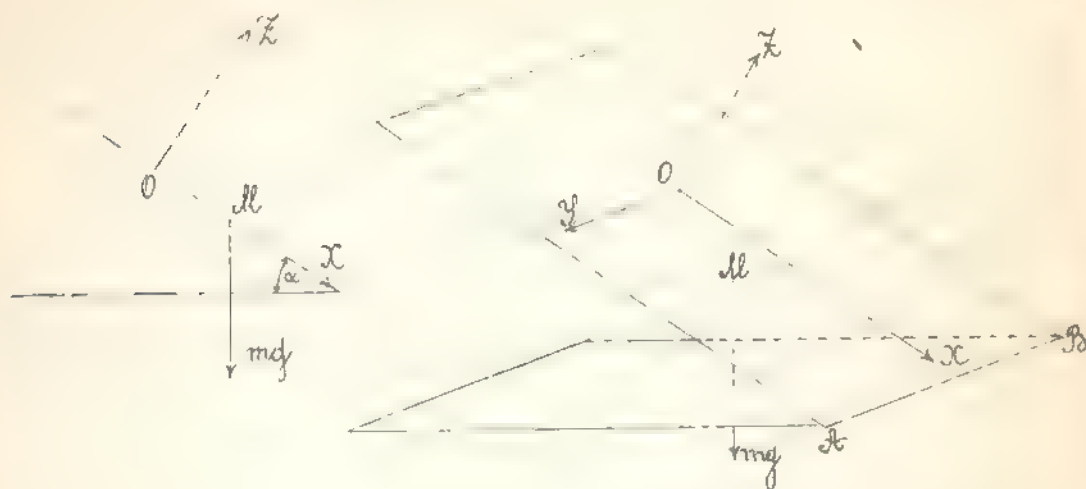
$$z'' = 0,$$

то

$$R = mg \cos \alpha,$$

т.е. реакція равна составляющей силы тяжести по перпендикуля-

ру къ плоскости. Знакъ плюсъ показываетъ, что реакція направлена по положительной нормали, т.е. по положительной оси  $OZ$



Чертежъ 62.

Вторая задача. Рассмотримъ движеніе точки по поверхности круглаго конуса подъ вліяніемъ силы притяженія по перпендикуляру къ оси этого конуса, обратно пропорціональной кубу разстоянія точки отъ оси (черт. 63).

Пусть сила притяженія единицы массы на единицу разстоянія будетъ  $k$ , тогда величина данной силы выразится такъ:

$$-\frac{k m}{r^3}$$

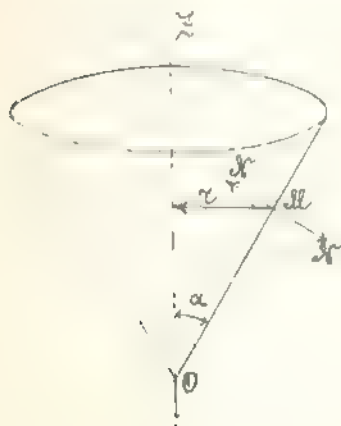
Уравненіе поверхности конуса будетъ:

$$r = p z$$

или

$$x^2 + y^2 - p^2 z^2 = 0,$$

гдѣ



Чертежъ 63.

$$\rho = \operatorname{tg} \alpha .$$

Посмотримъ, что дадутъ намъ законы живой силы и площадей. Въ нашемъ случаѣ сила имѣетъ потенциалъ и силовая функція будетъ.

$$U = \int - \frac{k m}{r^2} dr = - \frac{k m}{2 r^2}$$

Имѣемъ интеграль живой силе:

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{k m}{2 r^2} = h_1 (\text{const}).$$

Сокративъ на  $\frac{m}{2}$ , получимъ:

$$v^2 - \frac{k}{r^2} = h, \quad (8)$$

гдѣ

$$h = \frac{2 h_1}{m}$$

Моментъ силы относительно оси конуса равенъ нулю, такъ какъ сила пересѣкаетъ ось; также и моментъ реакціи относительно оси конуса равенъ нулю, такъ какъ конусъ нашъ есть поверхность вращенія; поэтому существуетъ интеграль площадей въ плоскости, перпендикулярной къ оси  $OZ$ :

$$r^2 \phi' = C (\text{const}) \quad (9)$$

Опредѣлимъ постоянныя произвольныя  $h$  и  $C$  изъ начальныхъ данныхъ  $x_0, y_0, x'_0, y'_0$ .

Этимъ данными уже опредѣляются  $z_0$  и  $z'_0$ . Въ самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ:

$$x^2 + y^2 - \rho^2 z^2 = 0,$$

откуда

$$z_0 = \pm \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{\rho};$$



(въ нашемъ случаѣ + ), и

$$xx' + yy' - r^2 \tau \tau' = 0 ;$$

откуда

$$\tau'_0 = \frac{x_0 x'_0 + y_0 y'_0}{r^2_0 \tau_0}$$

По начальнымъ даннымъ найдемъ

$$v_0 = \sqrt{x_0'^2 + y_0'^2 + \tau_0'^2}$$

и

$$\tau_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} ;$$

слѣдовательно:

$$h = v_0^2 - \frac{k}{\tau_0^2} .$$

Такъ какъ

$$xy' - yx' = r^2 \varphi' ,$$

то

$$C = x_0 y'_0 - y_0 x'_0 .$$

Если заданы полярныя координаты, то

$$C = r_0^2 \varphi'_0 ,$$

если задана скорость и ея направленіе, то

$$C = r_0 v_0 \sin(\tau_0, v_0) \cdot \sin(v, \tau) .$$

Опредѣлимъ движеніе точки.

Напишемъ интегралъ (8) живой силы въ видѣ:

$$\tau'^2 + \tau'^2 + \tau'^2 \varphi'^2 = \frac{k}{\tau^2} + h \dots \dots \dots (10)$$

Исключая изъ уравненій (9) и (10) и уравненія поверхности двѣ координаты  $\tau$  и  $\varphi$  мы получимъ одно уравненіе съ одной координатой  $\chi$  .

Такъ какъ

$$x = p z,$$

то

$$x' = p z'.$$

Изъ уравненія (9)

$$\varphi' = \frac{c}{z'} = \frac{c}{p^2 z^2}.$$

Подставимъ въ уравненіе (10)

$$x'^2 + p^2 z'^2 + \frac{c^2}{p^2 z^2} = \frac{k}{p^2 z^2} + h,$$

или

$$p^2 z^2 x'^2 (1 + p^2) = k - c^2 + h p^2 z^2$$

Извлекая квадратный корень, получимъ

$$p x z' \sqrt{1 + p^2} = \sqrt{k - c^2 + h p^2 z^2}.$$

Передъ радикаломъ возьмемъ знакъ плюсъ или минусъ, смотря по тому, возрастаетъ  $z$  при движеніи или убываетъ; пусть будетъ знакъ плюсъ; тогда

$$p \sqrt{1 + p^2} \cdot \frac{z \cdot dz}{\sqrt{k - c^2 + h p^2 z^2}} = dt.$$

Интегрируемъ

$$\frac{p \sqrt{1 + p^2}}{h p^2} \int \frac{h p^2 dz}{2 \sqrt{k - c^2 + h p^2 z^2}} = \frac{p \sqrt{1 + p^2}}{h p^2} \sqrt{k - c^2 + h p^2 z^2} = t + A;$$

откуда

$$k - c^2 + h p^2 z^2 = \frac{h^2 p^2}{1 + p^2} (t + A)^2.$$

Постоянную  $A$  определяемъ, полагая  $t_0 = 0$

$$A = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{h \cdot p} \cdot \sqrt{k - c^2 + h p^2 z_0^2}.$$

Такимъ образомъ

$$z = \frac{1}{p\sqrt{h}} \sqrt{\frac{k^2 p^2}{1+p^2} (t+k)^2 - k + C^2}$$

Мы нашли  $z$  въ функціи времени, легко уже затѣмъ найти и  $\varphi'$  : проинтегрировавши выраженіе  $\varphi$  , найдемъ уголъ  $\varphi$  , какъ функцію времени.

Опредѣлимъ реакцію или давленіе точки на поверхность.

Дифференціальныя уравненія движенія будутъ.

$$m x'' = -\frac{k m}{r^3} x + \frac{R}{\Delta f} x,$$

$$m y'' = -\frac{k m}{r^3} y + \frac{R}{\Delta f} y,$$

$$m z'' = -\frac{R}{\Delta f} p^2 z.$$

Для опредѣленія реакціи возьмемъ третье изъ этихъ уравненій. Принимая во вниманіе, что

$$\Delta f = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4p^2 z^2} = 2\sqrt{p^2 x^2 + p^2 z^2} = 2pz\sqrt{1+p^2},$$

находимъ

$$R = -\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} m z''.$$

Выраженіе  $z''$  въ функціи отъ времени получимъ, дифференцируя два раза вышеприведенное выраженіе  $z$

**Третья задача.** Опредѣлимъ давленіе, которое оказываетъ на поверхность шара движущаяся по ней тяжелая точка.

Уравненіе поверхности:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0.$$

Условіе для скорости:

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

Условіє для ускоренія:

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

Дифференціальныя уравненія движенія будуть

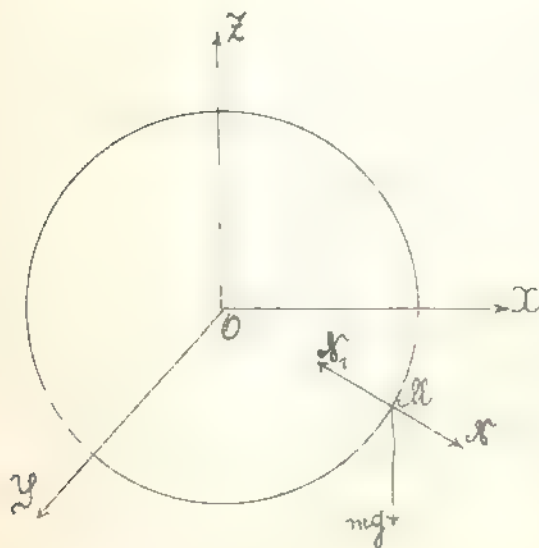
$$mx'' = \frac{R}{\Delta l} 2x,$$

$$my'' = \frac{R}{\Delta l} 2y,$$

$$mz'' = \frac{R}{\Delta l} 2z,$$

$$\Delta l = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2l.$$

Въ этихъ уравненіяхъ  $R > 0$ , когда реакція направлена въ наружную сторону по направленію  $ММ_1$  (черт. 64) и  $R < 0$ , когда реакція направлена во внутреннюю сторону по  $ММ_1$ .



Чертежъ 64.

откуда

$$R = \frac{m}{l} (gl - v^2).$$

Подставляя значенія вторыхъ производныхъ отъ координатъ по времени въ уравненіе, выражающее условіе для ускоренія, найдемъ

$$\frac{R}{2.l.m} 2l^2 - gl + v^2 = 0,$$

Квадратъ скорости можно легко выразить съ помощью интеграла живой силы, такъ какъ существуетъ силоная функція:

$$U = -mgz.$$

Мы имѣемъ:

$$\frac{mv^2}{2} = mgz + h;$$

(постоянная  $h$  опредѣляется по начальнымъ даннымъ). Отсюда,

$$v^2 = 2gz + \frac{2h}{m},$$

значить

$$R = \frac{1}{l} (mgz + 2mgz - 2h) = \frac{1}{l} (3mgz - 2h).$$

Это же выраженіе служитъ и для опредѣленія давленія. Реакція шара отдѣляется равною нулю тогда, когда точка придетъ въ такое положеніе, для котораго  $z = \frac{2h}{3mg}$ ; это положеніе находится на верхней полусферѣ.

#### § 6. Уравненія равновѣсія точки, находящейся на гладкой поверхности.

Уравненія равновѣсія матеріальной точки, находящейся на гладкой поверхности, мы получимъ изъ дифференціальныхъ уравненій движенія (6), полагая ускореніе точки равнымъ нулю, т.е. полагая, что

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad z'' = 0.$$

Уравненія эти будутъ:

$$\left. \begin{aligned} X + \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0, \\ Y + \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 0, \\ Z + \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Исключая величину  $R$ , находимъ:

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} - \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} - \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}} = 0 \quad (11)$$

Эти равенства выражаютъ условіе, необходимое и достаточное для равновѣсія точки на гладкой поверхности: равнодѣйствующая данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, должна быть направлена по нормали къ поверхности.

Два уравненія (11) вѣдуть съ уравненіемъ поверхности  $f(x, y, z) = 0$ , послужатъ намъ для опредѣленія положенія равновѣсія точки на гладкой поверхности при дѣйствіи заданныхъ силъ, т.е. для опредѣленія трехъ координатъ точки  $(x, y, z)$ ; такимъ образомъ мы можемъ получить одно положеніе равновѣсія точки, или нѣкоторое конечное число положеній равновѣсія, но можемъ и бесконечное большое число положеній равновѣсія на нѣкоторой линіи или на нѣкоторой части поверхности.

Величину реакціи  $R$  найдемъ съ помощью одного изъ уравненій (10), подставивши вѣсто координатъ  $x, y, z$  полученные ихъ значенія.

## § 7. Движеніе точки по негладкой поверхности.

Если точка движется по негладкой поверхности, тогда, кромѣ нормальной реакціи  $R$ , на точку будетъ дѣйствовать еще одна сила, именно сила тренія.

На основаніи опыта установлены слѣдующія два свойства силы тренія:

1) Сила тренія, приложенная къ точкѣ, направлена по той же прямой, что и скорость точки, но въ противоположную сторону;

2) Величина силы тренія равна абсолютной величинѣ нормаль-



ной реакції, умноженої на деякого постійний коефіцієнт  $k$ , називається коефіцієнтом динамічного трення; - этот коефіцієнт характеризує ступень шероховатости данной поверхности.

Такимъ образомъ:

$$T = k[R],$$

гдѣ  $[R]$  обозначаетъ абсолютную величину нормальной реакції.

Коефіцієнтъ трення динамическаго, развивающагося при движеніи точки по поверхности, не болѣе коефіцієнта статическаго трення той же поверхности, т.е. коефіцієнта трення въ случаѣ покоящейся точки.

Такъ какъ составляющіе угловъ, образуемыхъ скоростью точки съ координатными осями, выражаются отношеніями  $\frac{x'}{v}$ ,  $\frac{y'}{v}$ ,  $\frac{z'}{v}$ , то на основаніи упомянутыхъ выше свойствъ силы трення, проекціи ея на координатныя оси будутъ:

$$T_{\cos(T, X)} = k[R] \left( \frac{x'}{v} \right) = k[R] \frac{x'}{v},$$

$$T_{\cos(T, Y)} = -k[R] \frac{y'}{v},$$

$$T_{\cos(T, Z)} = k[R] \frac{z'}{v}.$$

Присоединяя къ задаваемымъ силамъ, приложеннымъ къ точкѣ, нормальную реакцію поверхности и силу трення, мы рассматриваемъ точку какъ свободную; и потому получаемъ дифференціальныя уравненія движенія точки по негладкой поверхности въ видѣ:

$$m \ddot{x} = X + \frac{\partial \phi}{\partial x} - k[R] \frac{x'}{v},$$

$$m \ddot{y} = Y + \frac{\partial \phi}{\partial y} - k[R] \frac{y'}{v},$$

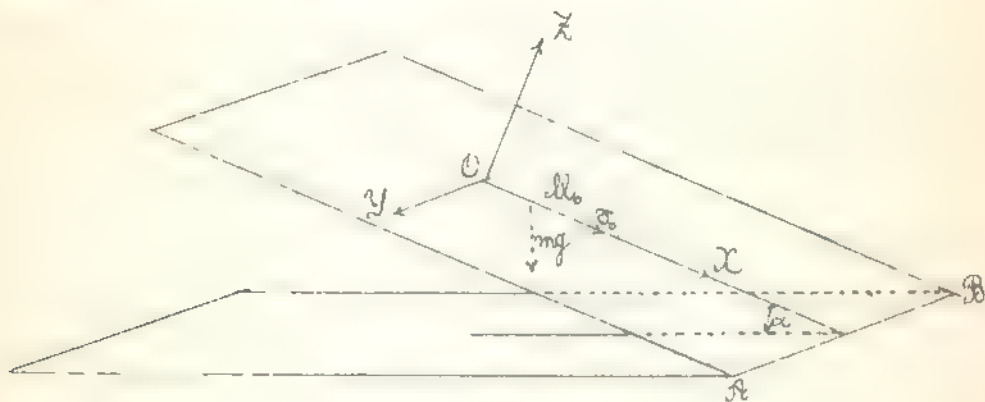
$$m \ddot{z} = Z + \frac{\partial \phi}{\partial z} - k[R] \frac{z'}{v}.$$

Присоединяя къ этимъ тремъ уравненіямъ уравненіе поверхности  $\{x, y, z\} = 0$ , имеемъ четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ:  $x, y, z, n$ .

*Примѣръ.*

Прямолинейное движеніе тяжелой точки по негладкой наклонной плоскости.

Пусть  $\alpha$  — уголъ, составляемый плоскостью съ горизонтомъ (черт. 65),  $k$  — коэффициентъ динамическаго тренія. Наклонную плоскость прикидаемъ за плоскость  $xOy$ ; ось  $Ox$  направляемъ по линіи наибольшаго наклона внизъ; ось  $Oz$  по перпендикуляру къ плоскости вверхъ.



Чертежъ 65.

Уравненіе плоскости:  $z = 0$ .

Пусть начальная скорость  $v_0$  направлена по оси  $Ox$  внизъ ( $v_0 > 0$ ), тогда дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$mx'' = mg \sin \alpha - k[R],$$

$$my'' = 0,$$

$$mz'' = -mg \cos \alpha + R.$$

Такъ какъ  $z = 0$ , то изъ послѣдняго дифференціального уравненія находимъ:

$$R = mg \cos \alpha.$$

Подставим значение  $\mathcal{R}$  въ первое изъ дифференціальньхъ уравненій:

$$m\ddot{x} = m.g.\sin\alpha - k.m.g.\cos\alpha$$

откуда, по сокращеніи на  $m$ , имѣемъ:

$$\ddot{x} = g.\cos\alpha.(tg\alpha - k).$$

Отсюда слѣдуетъ, что въ рассматриваемомъ случаѣ ускореніе постоянно, т.е., что точка движется равноускоренно.

Полагая, что начальныя данныя суть:  $x_0$  и  $x'_0$ , найдемъ:

$$x' = x'_0 + g.\cos\alpha.(tg\alpha - k).t,$$

и

$$x = x_0 + x'_0.t + \frac{1}{2}g.\cos\alpha.(tg\alpha - k).t^2.$$

Рассматривая выраженіе проекціи ускоренія  $\ddot{x}$  на ось  $OX$ , замѣчаемъ, что если  $k < tg\alpha$ , то  $\ddot{x} > 0$ , тогда скорость все время возрастаетъ; если же  $k > tg\alpha$ , то  $\ddot{x} < 0$ , тогда скорость точки будетъ уменьшаться и, наконецъ, въ нѣкоторый моментъ сдѣлается равною нулю.

Полагая  $\ddot{x} = 0$ , найдемъ:

$$t_1 = -\frac{x'_0}{g.\cos\alpha.(tg\alpha - k)}.$$

Такъ какъ  $tg\alpha - k < 0$ , то при  $x'_0 > 0$ ,  $t_1 > 0$ ; это показываетъ, что моментъ  $t_1$  слѣдуетъ за начальнымъ моментомъ; такимъ образомъ, въ рассматриваемомъ случаѣ движущаяся точка останавливается въ моментъ  $t_1$  и затѣмъ продолжаетъ оставаться въ покое.

Если начальная скорость  $v_0$  будетъ направлена вверхъ ( $x'_0 < 0$ ), то первое изъ дифференціальньхъ уравненій движенія представится въ видѣ:

$$m\ddot{x} = m.g.\sin\alpha + k.|R|$$

и въ послѣдующія формулы вмѣсто  $(tg\alpha - k)$  войдетъ  $(tg\alpha + k)$ .

*Примѣчаніе.* Уравненіе данной поверхности, по которой движется матеріальная точка, содержитъ время  $\{f(x, y, z, t)\}$  въ тѣхъ случаяхъ, когда поверхность сама движется или деформируется.

Примѣръ пераго случая представляетъ падающая подъ вліяніемъ силы тяжести наклонная плоскость, составляющая съ горизонтомъ уголъ  $\alpha$ ; если плоскость остается параллельной самой себѣ, то предполагая, что ось  $Ox$  направлена по перпендикуляру къ плоскости вверхъ, мы получимъ уравненіе плоскости въ видѣ:

$$z + \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha = 0 ;$$

примѣръ второго случая представляетъ поверхность шара, радіусъ котораго возрастаетъ пропорціонально времени

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a + b t)^2 = 0 .$$

Дифференціальныя уравненія движенія точки въ этихъ случаяхъ имѣютъ тотъ же видъ, который указавъ выше [уравненія (6)] для случая, когда уравненіе поверхности не содержитъ времени.

## Г Л А В А VII.

### ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ПО КРИВОЙ.

#### § 1. Дифференціальныя уравненія движенія и реакція кривой.

Кривая задается обыкновенно уравненіями двухъ поверхностей, которыя своимъ пересѣченіемъ ее образуютъ:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0, \\ f_2(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1) *)$$

Уравнения (1) будут содержать время  $t$  в тех случаях, когда кривая движется или деформируется, но здесь мы будем рассматривать только тот случай, когда данная кривая неподвижна.

В простейшем случае, когда данная кривая плоская, мы принимаем ее плоскость за плоскость  $XOY$  и тогда уравнения кривой будут:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1')$$

Первое из уравнений (1') есть уравнение цилиндра, производящая которого параллельна оси  $OZ$ , второе — уравнение плоскости  $XOY$ .

Данная кривая может быть реальная, как например, желобъ или криволинейная трубка, (въ которой движется матеріальная точка), и геометрическая, въ действительности несуществующая, а дающая лишь геометрическое представление въ некоторого условия; — по такой кривой, именно, по окружности, движется, например, матеріальная точка, прирѣпленная къ стержню, вращающемуся вокругъ неподвижной оси.

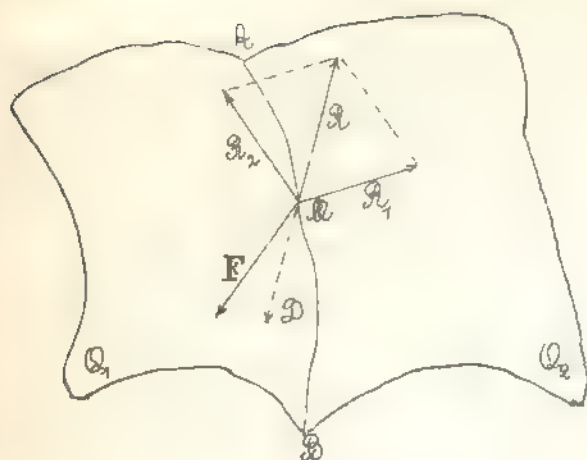
Реальная кривая можетъ быть гладкая и негладкая. Мы бу-

\*) В частных случаях уравнения (1) могутъ имѣть болѣе простой видъ:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, z) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} y - \varphi_1(x) &= 0, \\ z - \varphi_2(x) &= 0. \end{aligned} \right\}$$



Чертежъ 66.

которая обозначимъ черезъ  $Q_1$  и  $Q_2$ .

Пусть проекція равнодѣйствующей  $F$  данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, будутъ  $X, Y, Z$ . Каждая изъ поверхностей  $Q_1$  и  $Q_2$  оказываетъ на точку реакцію, направленную по нормали къ поверхности, первая - реакція  $R_1$ , вторая - реакція  $R_2$ .

Присоединяя къ задаваемымъ силамъ, приложеннымъ къ точкѣ, реакціи поверхностей, мы рассмотримъ точку, какъ свободную, и потому дифференціальныя уравненія движенія точки по гладкой кривой получимъ въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= X + \frac{R_1}{\Delta f_1} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{R_2}{\Delta f_2} \frac{\partial f_2}{\partial x}, \\ m\ddot{y} &= Y + \frac{R_1}{\Delta f_1} \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{R_2}{\Delta f_2} \frac{\partial f_2}{\partial y}, \\ m\ddot{z} &= Z + \frac{R_1}{\Delta f_1} \frac{\partial f_1}{\partial z} + \frac{R_2}{\Delta f_2} \frac{\partial f_2}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

гдѣ

$$\Delta f_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)^2},$$

и

демъ сначала разсма-  
тривать случай гладкой  
кривой, къ которому от-  
носится и движеніе точ-  
ки по геометрической  
кривой.

Пусть точка  $M$  дви-  
жется по кривой  $AB$   
(черт. 66), представля-  
ющей пересѣченіе двухъ  
гладкихъ поверхностей,



$$\Delta f_k = \sqrt{\left(\frac{\partial f_k}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_k}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_k}{\partial z}\right)^2} \quad *)$$

Какъ  $R_1$ , такъ и  $R_2$  обозначать величину соответствующей реакціи, взятую со знакомъ +, когда реакція направлена по положительной нормали къ соответствующей поверхности, и со знакомъ -, когда она направлена по отрицательной нормали.

Два уравненія (1) и три уравненія (2) послужатъ намъ для опредѣленія пяти неизвѣстныхъ:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $R_1$  и  $R_2$ .

Для опредѣленія движенія точки по данной кривой, исключимъ изъ уравненій (2) съ помощью известнаго алгебраическаго приёма реакціи  $R_1$  и  $R_2$ .

Въ полученное уравненіе подставимъ вмѣсто  $y$ ,  $z$ ,  $y'$ ,  $z'$ ,  $y''$ ,  $z''$ , ихъ выраженія въ функціяхъ отъ  $x$ , полученныхъ изъ уравненій (1).

Если уравненія (1) дадутъ:

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi_1(x), \\ z &= \varphi_2(x), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

то

$$\left. \begin{aligned} y' &= \varphi_1'(x) \cdot x', \\ z' &= \varphi_2'(x) \cdot x', \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

и

$$\left. \begin{aligned} y'' &= \varphi_1''(x) \cdot x'^2 + \varphi_1'(x) \cdot x'', \\ z'' &= \varphi_2''(x) \cdot x'^2 + \varphi_2'(x) \cdot x'', \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Въ результатѣ мы получимъ дифференціальное уравненіе второго порядка относительно координаты  $x$ . Интегрируя это урав-

\*) Зададимъ, что изъ уравненій (2) выражаютъ движеніе точки по кривой и въ томъ случаѣ, когда уравненія ея содержатъ время  $t$ .

$$f_1(x, y, z, t) = 0,$$

$$f_2(x, y, z, t) = 0.$$

вненіе, мы найдемъ первый и второй интегралы, содержащіе двѣ постоянныя произвольныя  $C$  и  $D$ , для опредѣленія которыхъ послужатъ: начальное положеніе и начальная скорость точки.

Если найдемъ  $x$ , какъ функцію отъ  $t$ ,  $C$  и  $D$ , то по формуламъ (3) найдемъ затѣмъ  $y$  и  $z$ .

Очевидно, для начального положенія можно задать только одну координату, напримѣръ,  $x_0$ , потому что по формуламъ (3)

$$y_0 = \varphi_1(x_0); \quad z_0 = \varphi_2(x_0);$$

а для начальной скорости только одну проекцію, напримѣръ,  $x'_0$ , такъ какъ по формуламъ (4):

$$y'_0 = \varphi'_1(x_0) \cdot x'_0,$$

и

$$z'_0 = \varphi'_2(x_0) \cdot x'_0.$$

Перейдемъ къ разсмотрѣнію реакцій  $R_1$  и  $R_2$ .

Эти реакціи мы можемъ сложить по правилу параллелограмма въ одну равнодѣйствующую  $R$  (черт. 66).

Сила  $R$ , заключающаяся въ плоскости  $(R_1, R_2)$ , нормальной къ данной кривой, называется *реакціей кривой*: такимъ образомъ реакція кривой линіи есть равнодѣйствующая двухъ реакцій, которыя оказываютъ на точку двѣ поверхности, пересекающіяся по этой кривой.

Очевидно, что сумма двухъ послѣднихъ членовъ въ каждомъ изъ уравненій (2) выражаетъ проекцію реакцій кривой  $R$  на соответствующую ось, такъ что:

$$R \cos(R, X) = \frac{R_1 \partial f_1}{\partial f_1 \partial x} + \frac{R_2 \partial f_2}{\partial f_2 \partial x},$$

$$R \cos(R, Y) = \frac{R_1 \partial f_1}{\partial f_1 \partial y} + \frac{R_2 \partial f_2}{\partial f_2 \partial y},$$

$$R \cos(R, Z) = \frac{R_1 \partial f_1}{\partial f_1 \partial z} + \frac{R_2 \partial f_2}{\partial f_2 \partial z}.$$

или по тѣмъ же уравненіямъ (2):

$$\left. \begin{aligned} R \cos(R, X) &= m \cdot x'' - X, \\ R \cos(R, Y) &= m \cdot y'' - Y, \\ R \cos(R, Z) &= m \cdot z'' - Z. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Зная данныя силы, приложенныя къ точкѣ, и движеніе точки, найдемъ изъ уравненій (6) три проекціи реакціи  $R$ , какъ функціи времени, а следовательно, опредѣлимъ величину и направленіе реакціи кривой.

Если кривая оказываетъ на точку  $M$  реакцію  $R$ , то по извѣстному принципу, обратно, точка  $M$  оказываетъ на кривую силу  $Q$ , равную и противоположную реакціи  $R$  (черт. 66), — эта сила называется: давленіе точки на кривую.

Такимъ образомъ изъ опредѣленія давленія слѣдуетъ, что нахожденіе реакціи кривой линіи и нахожденіе давленія точки на кривую — вопросы равносильные; но давленіе на кривую разсматривается чаще, чѣмъ реакція кривой.

Въ случаѣ плоской кривой, какъ мы выше замѣтили, уравненія ея будутъ:

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= 0, \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Предположимъ сначала, что равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ точкѣ, во все время движенія направлена въ плоскости кривой, тогда проекціи ея будутъ:  $X, Y, Z = 0$

Составимъ дифференціальныя уравненія движенія точки:

$$\left. \begin{aligned} m \cdot x'' &= X + \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ m \cdot y'' &= Y + \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Эти два уравненія <sup>\*</sup>), вмѣстѣ съ уравненіемъ  $f(x, y) = 0$  служатъ для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ:  $x$ ,  $y$ ,  $R$  въ функціяхъ времени.

Исключая  $R$  изъ уравненій движенія, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(mx' - X) - \frac{\partial f}{\partial x}(my' - Y) = 0.$$

Подставляя сюда вмѣсто  $y$  его выраженіе въ функціи отъ  $x$ , полученное изъ уравненій (1'), и произведя интегрированіе, найдемъ  $x$ , какъ функцію отъ  $t$  и постоянныхъ произвольныхъ  $C$  и  $D$ .

Зная  $x$ , легко найти  $y$  и затѣмъ  $R$ .

Если равнодѣйствующая силѣ, приложенныхъ къ точкѣ, не заключается въ плоскости данной кривой, тогда проекціи ея будутъ:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , и дифференціальныя уравненія движенія представятся въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} mx'' - X + \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial x}, \\ my'' - Y + \frac{R}{\Delta f} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ mx'' = Z + R_2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2'')$$

гдѣ  $R_2$  реакція плоскости кривой (плоскости  $XCY$ ).

Такъ какъ  $x'' = 0$ , то третье изъ уравненій (2'') дастъ намъ:

$$R_2 = Z$$

Слѣдовательно, реакція плоскости по величинѣ равна составляющей данной силы по перпендикуляру къ плоскости и направлена въ противоположную сторону.

Координаты  $x$ ,  $y$  и реакція  $R$  находятся такъ же, какъ и въ предыдущемъ случаѣ.

<sup>\*</sup>) Третье уравненіе обращается въ тождество:  $0 = 0$ .

## § 2. Законъ живой силы.

Примѣнимъ законъ живой силы къ движенію точки по гладкой неподвижной кривой.

Знаемъ, что

$$d \frac{mv^2}{2} = F ds \cos(F, v) + R ds \cos(R, v),$$

но  $R \perp v$ , слѣдовательно, элементарная работа реакціи кривой равна нулю. Такимъ образомъ, бесконечно малое приращеніе живой силы для точки, движущейся по гладкой неподвижной кривой, выражается такъ же, какъ и въ случаѣ свободной точки:

$$d \frac{mv^2}{2} = F ds \cos(F, v).$$

Если данная сила (или равнодѣйствующая данныхъ силъ), приложенная къ точкѣ, движущейся по гладкой неподвижной кривой, имѣетъ потенціаль ( $U$ ), то законъ живой силы даетъ намъ интегралъ живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} - U = h, \dots\dots\dots (*)$$

Слѣдуетъ имѣть въ виду, что для движенія точки по гладкой неподвижной кривой существуетъ интегралъ, аналогичный интегралу живой силы, всякій разъ, какъ данная сила, приложенная къ точкѣ зависитъ только отъ положенія точки.

Въ самомъ дѣлѣ, выразивши съ помощью двухъ уравненій данной кривой координаты точки  $x, y, z$  въ функціяхъ одной переменной  $u$  (напримѣръ, въ функціяхъ отъ  $x$ ), мы найдемъ въ разсматриваемомъ случаѣ слѣдующее выраженіе элементарной работы:

$$X dx + Y dy + Z dz = F(u) du,$$

а тогда изъ закона живой силы получаемъ:

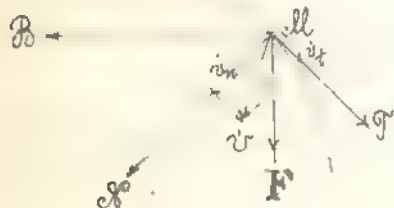
$$\frac{mv^2}{2} - \int \mathcal{F}(u).du = \text{const.} \dots \dots \dots (**)$$

Интеграль живой силы (\*) [или аналогичный интеграль (\*\*)] когда онъ существуетъ, достаточенъ для опредѣленія движенія точки по кривой, такъ какъ для этого достаточно найти одну изъ координатъ точки (напримѣръ,  $x$ ), какъ функцію времени.

### § 3. Вторая форма дифференціальныхъ уравненій движенія точки по неподвижной кривой.

Уравненія данной кривой въ нѣкоторыхъ случаяхъ трудно записать, въ другихъ они очень сложны; поэтому мы составимъ теперь дифференціальныя уравненія движенія точки по неподвижной кривой въ иномъ видѣ, взявши проекціи ускоренія, силы и реакціи на три взаимно перпендикулярныя оси, движущіяся вмѣстѣ съ точкой именно, на касательную ( $MT$ ) къ кривой, направленную въ сторону движенія точки (т.е. на направленіе скорости) (черт.

67), на главную нормаль ( $MB$ ), направленную къ центру кривизны кривой, и на перпендикуляръ къ этимъ двумъ осямъ, т.е. на *бинормаль* ( $MB$ ).



Чертежъ 67.

Выраженіе для проекцій у-

скоренія на касательную и глав-

ную нормаль траекторіи точки наймъ уже извѣстны изъ курса Кинематики:

$$\dot{v} \cos(\dot{\varphi}, T) = \frac{dv}{dt},$$

$$\dot{v} \cos(\dot{\varphi}, N) = \frac{v^2}{\rho},$$

гдѣ  $\rho$  радиусъ кривизны траекторіи. Такъ какъ ускореніе нахо-



дится въ плоскости кривизны, то проекція ускоренія на бинормаль траекторіи равна нулю:

$$\cos(\alpha, \mathbf{P}) = 0$$

Такимъ образомъ, дифференціальныя уравненія движенія точки представляются въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{T}),^*) \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{N}) + R \cos(\mathbf{R}, \mathbf{N}), \\ 0 &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{B}) + R \cos(\mathbf{R}, \mathbf{B}). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Первое изъ уравненій (7) служитъ для опредѣленія движенія, а второе и третье для опредѣленія реакціи  $\vec{R}$ , слѣдовательно, и для опредѣленія касательнаго  $\vec{D}$  точки на кривую. Принимая во вниманіе, что:

$$\begin{aligned} D \cos(\mathbf{D}, \mathbf{N}) &= -R \cos(\mathbf{R}, \mathbf{N}), \\ R \cos(\mathbf{R}, \mathbf{B}) &= -D \cos(\mathbf{D}, \mathbf{B}), \end{aligned}$$

можно на основаніи уравненій (7) написать слѣдующія выраженія проекцій давленія:

$$\left. \begin{aligned} D \cos(\mathbf{D}, \mathbf{N}) &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{N}) - \frac{mv^2}{\rho}, \\ D \cos(\mathbf{D}, \mathbf{B}) &= F \cos(\mathbf{F}, \mathbf{B}) \end{aligned} \right\} \dots \dots (8)$$

Чтобы найти проекціи данной силы  $\mathbf{F}$  на главную нормаль и на бинормаль, спроектируемъ эту силу предварительно на нормальную плоскость  $\mathbf{MMN}$  (черт. 68).

Обозначимъ проекцію силы  $\mathbf{F}$  на пл.  $\mathbf{MMN}$  черезъ  $\mathbf{F}_n$ . Оче-

\*) Проекція реакціи равна нулю, ибо:

$$\cos(\mathbf{R}, \mathbf{T}) = \cos(\mathbf{R}, \mathbf{v}) = 0.$$

видно:

$$F_n = F \sin(F, \mathcal{N}),$$

$$F \cos(F, \mathcal{X}^0) = F_n \cos(F_n, \mathcal{X}^0),$$

$$F \cos(F, \mathcal{B}) = F_n \cos(F_n, \mathcal{B})$$

Подставляя въ уравненія (8) вместо проекцій силы  $F$  на главную нормаль и бинормаль ихъ выраженія черезъ  $F_n$ , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{D} \cos(\mathcal{D}, \mathcal{X}^0) &= F_n \cos(F_n, \mathcal{X}^0) = \frac{\pi v^2}{\rho}, \\ \mathcal{D} \cos(\mathcal{D}, \mathcal{B}) &= F_n \cos(F_n, \mathcal{B}) \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

Изъ уравненій (8') слѣдуетъ, что проекціи на главную нормаль и бинормаль давленія на кривую выражаются двумя членами; значить, давленіе есть равнодѣйствующая двухъ силъ; одна изъ нихъ есть проекція данной силы на нормальную плоскость, а другая по величинѣ равна  $\frac{\pi v^2}{\rho}$  и направлена по главной нормали, но не къ центру кривизны, а въ сторону изгибности (въ сторону стрѣлчатой оси  $\mathcal{X}^0$ ).

Эта вторая сила, по величинѣ равная массѣ, умноженной на квадратъ скорости и раздѣленной на радіусъ кривизны ( $\frac{\pi v^2}{\rho}$ ), называется **центробѣжной силой**.



Чертежъ 68.

Такимъ образомъ, давленіе точки на кривую есть равнодѣйствующая двухъ силъ: проекціи данной силы на нормальную плоскость и центробѣжной силы.

Изъ сказаннаго ясно, что центробѣжная сила есть только составляющая того давленія, которое точка оказываетъ на кривую. значить, центробѣжная сила

не есть сила, приложенная къ точкѣ, а исходящая отъ точки и приложенная къ кривой, по которой точка движется.

Замѣтимъ, что сила, по величинѣ равная ускоренію точки, умноженному на массу ( $m\ddot{x}$ ), и направленная въ сторону, противоположную ускоренію, называется силой инерціи; обозначимъ силу инерціи черезъ  $Q$ ; очевидно, проекціи ея на координатныя оси будутъ:

$$Q \cos(Q, X) = -m\ddot{x},$$

$$Q \cos(Q, Y) = -m\ddot{y},$$

$$Q \cos(Q, Z) = -m\ddot{z};$$

а проекціи на касательную, на главную нормаль и на бинормаль траекторіи будутъ:

$$Q \cos(Q, T) = -m \frac{dv}{dt},$$

$$Q \cos(Q, N) = m \frac{v^2}{\rho},$$

$$Q \cos(Q, B) = 0.$$

Второе изъ этихъ уравненій показываетъ, что центробѣжная сила есть нормальная составляющая силы инерціи.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что въ томъ случаѣ, когда точка движется по кривой съ постоянной скоростью, сила инерціи и есть ничто иное, какъ центробѣжная сила.

Разсмотримъ важнѣйшіе частные случаи движенія точки по кривой.

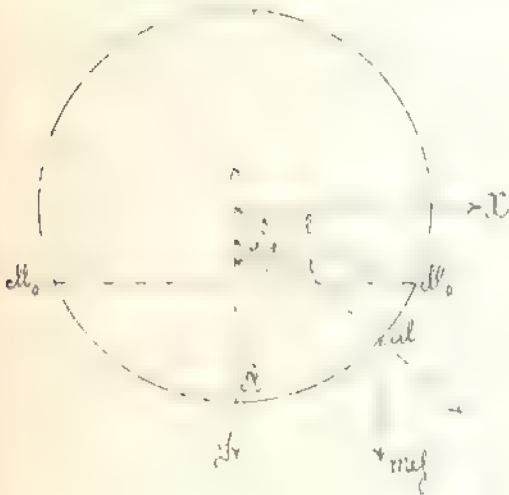
#### § 4. Математическій (крутовой) маятникъ.

Тяжелая точка  $M$  (черт. 69) соединена съ неподвижной точкой  $O$  посредством невѣсимаго, негибкаго и нерастяжимаго стержня длины  $l$ , который можетъ вращаться вокругъ точки  $O$

въ вертикальной плоскости; рассмотрим колебательное движение точки  $M$ .

Намъ предстоитъ такимъ образомъ рассмотреть колебательное движение тяжелой точки по окружности радиуса  $l$ , заключенной въ вертикальной плоскости.

Центръ окружности возьмемъ за начало координатъ, ось  $Oy$  направимъ вертикально внизъ.



Опредѣлимъ сначала движение точки  $M$ , а затѣмъ и давленіе ея на окружность или на стержень

1) Движеніе. Сила, приложенная къ точкѣ имѣетъ потенціалъ:

$$U = mgy,$$

Где  $g$  — ускореніе.

Слѣдовательно, существуетъ законъ сохранения живой силы и можетъ быть написанъ интегралъ живой силы:

$$\frac{mv^2}{2} = mgy + h \quad (9)$$

Пусть начальныя условія будутъ:

$$t_0 = 0, v_0 = 0, y = l \cos \alpha,$$

т.е. точка  $M$  въ начальный моментъ отклонена отъ оси  $Oy$  на нѣкоторый уголъ  $\alpha$  и пущена съ начальной скоростью, равной нулю.

Изъ начальныя условій находимъ:

$$h = -mg.l.\cos\alpha.$$

Подставляя въ уравненіе (9) значеніе постоянной произвольной  $h$  и введя переменный угол  $\varphi$ , получимъ:

$$\frac{m.v^2}{2} = mg.l.(\cos\varphi - \cos\alpha),$$

откуда:

$$v^2 = 2g.l.(\cos\varphi - \cos\alpha) \dots \dots \dots (10)$$

Изъ уравненія (10) видимъ, что величина скорости зависитъ только отъ  $\cos\varphi$ , слѣдовательно, если возьмемъ такія положенія точки  $M$ , для которыхъ  $\cos\varphi$  будетъ имѣть одно и то же значеніе, то скорость точки въ этихъ положеніяхъ будетъ одна и та же. Такимъ образомъ, скорости движущейся точки въ двухъ положеніяхъ, находящихся на одной горизонтальной прямой, равны между собою; отсюда слѣдуетъ, что если точка  $M$  отъ начального положенія  $M_0$  опустится до низшаго положенія  $A$ , то она непремѣнно поднимется по другую сторону до положенія  $M'_2$ , находящагося на одномъ горизонтѣ съ начальнымъ положеніемъ, потому что тамъ только скорость будетъ равна нулю; при этомъ время, въ теченіе котораго точка проходитъ дуги  $M_0A$  и  $AM'_0$ , будетъ одинаково.

Опредѣлимъ законъ, по которому происходитъ колебаніе маятника, т.е. найдемъ зависимость между угломъ  $\varphi$  и временемъ  $t$ .

Такъ какъ

$$v^2 = l^2 \varphi'^2,$$

то изъ уравненія (10)

$$\varphi'^2 = \frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Пользуясь формулами:

$$\cos\varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

получим:

$$\varphi^2 = \frac{4g}{l} \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right),$$

откуда:

$$\varphi' = -2\sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Передъ радикаломъ будетъ знакъ  $-$ , потому что сначала уголъ  $\varphi$  уменьшается.

Изъ выраженія  $\varphi'$  находимъ:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = -2\sqrt{\frac{g}{l}} dt. \quad (11)$$

Интегрируемъ:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = -2\sqrt{\frac{g}{l}} t + C, \dots \dots \dots (12)$$

Въ лѣвой части у насъ получился такъ называемый эллиптический интегралъ, котораго мы въ конечномъ видѣ найти не можемъ.

Упростимъ нашъ эллиптический интегралъ, вводя новую переменную  $u$ , удовлетворяющую слѣдующему уравненію:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin u, \quad *)$$

отсюда находимъ:

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \sin \frac{\alpha}{2} \cos u du,$$

и

\*) Мы имѣемъ право выбрать такую замѣну, что  $\varphi < \alpha$ , следовательно:

$$\sin \frac{\varphi}{2} < \sin \frac{\alpha}{2}.$$



$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 u} ;$$

Слѣдовательно:

$$d\varphi = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos u \, du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 u}} .$$

Такъ какъ

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 u = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 u .$$

то

$$\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos u .$$

Подставивъ въ уравненіе (11), вмѣсто  $d\varphi$  и радикала, найденныя значенія, получимъ:

$$\frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 u}} = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot dt .$$

Въ правой части здѣсь надо поставить знакъ + , а не - , какъ въ уравненіи (11), по слѣдующимъ соображеніямъ.

когда  $\varphi = \alpha$  , тогда  $\sin u = 1$  значить  $u = \frac{\pi}{2}$  ,

"  $\varphi = 0$  , "  $\sin u = 0$  "  $u = \pi$  ,

"  $\varphi = -\alpha$  "  $\sin u = -1$  "  $u = \frac{3\pi}{2}$

"  $\varphi = 0$  "  $\sin u = 0$  "  $u = 2\pi$  и т.д.

Мы видимъ, что переменный уголъ  $u$  съ теченіемъ времени все возрастаетъ, слѣдовательно, производная  $\frac{du}{dt}$  будетъ все время положительная, поэтому передъ корнемъ надо взять + , и эллиптический интегралъ нашъ выразится такъ:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 u}} = + \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t + C_1 \dots \dots \dots (12')$$

Постоянную произвольную  $C_1 = \frac{c}{2}$  получимъ изъ уравненія (12) полагая

$$t = 0,$$

и, слѣдовательно:

$$u = \frac{\pi}{2},$$

$$C_1 = \left( \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}} \right)_{u=\frac{\pi}{2}}.$$

Такимъ образомъ получимъ:

$$\left( \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}} \right)_{u=\frac{\pi}{2}} - \left( \int \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}} \right)_{u=\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

Отсюда ясно, что для того, чтобы опредѣлить время въ которое точка переходитъ изъ  $M_0$  въ какое угодно положеніе  $M$  ии должны взять опредѣленный интегралъ въ предѣлахъ отъ  $\frac{\pi}{2}$  до соотвѣтствующаго положенію  $M$  значенія переменной и помножить его на  $\sqrt{\frac{l}{g}}$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^u \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}}$$

Отсюда уже, какъ частный случай, находимъ время прохожденія точки изъ начальнаго положенія  $M_0$  въ низшее положеніе  $M_1$ :

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}}$$

Точно также найдемъ время прохожденія точки изъ  $M$  въ  $M$

$$t_2 = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_x^{\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 u}}$$

Важно опредѣлить время одного размаха математическаго ма-

ятника, т.е. время прохождения точки из  $M_0$  в  $M'_0$ , — обозначим его через  $T$ ; очевидно, будет:

$$T = t_1 + t_2$$

но выше было указано, что скорость точки на обоих и томъ же горизонтѣ одна и та же, будетъ ли точка двигаться вверхъ или опускаться внизъ, значитъ:

$$t_1 = t_2$$

и, слѣдовательно:

$$T = 2t_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 u}}.$$

Введемъ, вѣсто  $u$ , новую переменную  $u_1$ , удовлетворяющую слѣдующему условию:

$$u_1 = u - \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда, когда  $u = 0$ , тогда  $u_1 = 0$ ,

$$u = \frac{3\pi}{2} \quad ; \quad u_1 = \frac{\pi}{2}$$

Кромѣ того,

$$du_1 = du$$

и

$$\sin u_1 = \sin u$$

Такимъ образомъ:

$$T = 2 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du_1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 u_1}}.$$

Разложимъ подынтегральную функцію въ рядъ.

Обозначивъ:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin u = x,$$

получимъ по биному Ньютона:

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 \dots$$

Поэтому предыдущее выражение  $\mathcal{T}$  представится въ видѣ слѣдующей суммы:

$$\mathcal{T} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ \int_0^{\frac{\alpha}{2}} du + \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sin^2 u \, du + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \sin^4 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sin^4 u \, du + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \sin^6 \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sin^6 u \, du + \dots \right\}$$

Получился рядъ интеграловъ одного типа, которые находятся по общей формулѣ:

$$\int_0^{\frac{\alpha}{2}} \sin^{2n} u \, du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n \cdot 2}.$$

Примѣнивъ эту формулу, находимъ:

$$\mathcal{T} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\}.$$

При достаточно маломъ  $\alpha$  только приблизительно можно принимать обычное выраженіе времени одного размаха:

$$\mathcal{T} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

гораздо точнѣе, если положить  $\sin \alpha$  равнымъ дугѣ и удержать только второй членъ, время  $\mathcal{T}$  выразится по формулѣ:

$$\mathcal{T} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

Мы видимъ, что время одного размаха математическаго маятника зависитъ отъ угла начальнаго отклоненія: чѣмъ послѣдній больше, тѣмъ больше время колебанія, значитъ колебанія даннаго математическаго маятника, строго говоря, не изохронны \*).

\*) ПРИМѢЧАНІЕ. Кроме колебательнаго движенія точка  $M$  въ разсматриваемомъ примѣрѣ можетъ, въ зависимости отъ величины начальной скорости, или приложившись къ верхней точкѣ окружности, или описывать всю окружность въ одномъ и томъ же направленіи.

2) Давленіе. Опредѣлимъ давленіе тяжелой точки  $M$  на окружность вертикальнаго круга, по которой происходитъ колебательное движеніе.

Мы вывели слѣдующее общее выраженіе для проекціи давленія на главную нормаль

$$Q \cos(D, N) = F_n \cos(F_n, N) - \frac{mv^2}{\rho},$$

гдѣ  $F_n$  проекція силъ на нормальную плоскость.

Въ рассматриваемомъ нами случаѣ нормаль  $N$  направлена по  $MO$  къ центру круга (черт. 69), и

$$\cos(D, N) = +1;$$

затѣмъ

$$F_n \cos(F_n, N) = -mg \cos \varphi,$$

и

$$\frac{mv^2}{\rho} = \frac{mv^2}{l} = 2mg(\cos \varphi - \cos \alpha).$$

Подставляя эти значенія въ выраженіе проекціи давленія на главную нормаль, находимъ:

$$Q \cos(D, N) = -mg \cos \varphi - 2mg(\cos \varphi - \cos \alpha);$$

отсюда

$$Q = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \alpha)$$

и

$$\cos(D, N) = -1;$$

слѣдовательно, давленіе направлено въ сторону выпуклости.

### § 5. Циклоидальный маятникъ.

Разсмотримъ движеніе тяжелой точки по циклоидѣ съ горизонтальнымъ основаніемъ, заключающейся въ вертикальной плоскости и обращенной выпуклостью внизъ.

Хотя и здѣсь интегралъ живой силы существуетъ, тѣмъ не ме-

іже въ данномъ случаѣ удобнѣе исходить изъ дифференціального уравненія движенія

$$m \frac{dv}{dt} = F \cos(F, \tau) \dots \dots \dots (13)$$

Обозначимъ черезъ  $s$  дугу циклоиды, отсчитываемую отъ точки  $O$  ( $s > 0$  вправо отъ точки  $O$ ;  $s < 0$  влѣво отъ  $O$ ), при движеніи точки дуга  $s$  или возрастаетъ или убываетъ, въ первомъ случаѣ мы имѣемъ

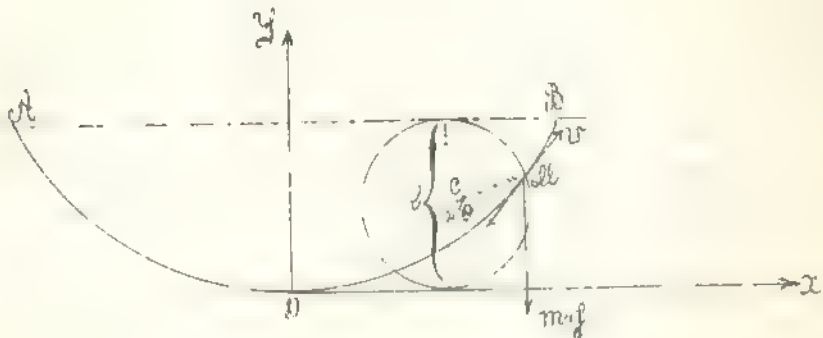
$$v = + \frac{ds}{dt} ;$$

во второмъ

$$v = - \frac{ds}{dt} ;$$

тогда соответственно будетъ:

$$\frac{dv}{dt} = \pm \frac{d^2s}{dt^2} ,$$



Чертежъ 70.

и слѣдовательно, лѣвую часть уравненія (13) можемъ написать въ видѣ:

$$\pm m \frac{d^2s}{dt^2}$$

Правая же часть уравненія будетъ:

$$F \cos(F, \tau) = F \cos(F, v) = - mg \cos(\tau, \tau);$$



$$\cos(\alpha, \beta) = + \frac{dy}{ds} ,$$

когда при движеніи дуга возрастаетъ, и

$$\cos(\alpha, \beta) = - \frac{dy}{ds} ,$$

когда дуга  $s$  убываетъ, слѣдовательно:

$$F \cos(F, \beta) = \pm m g \cdot \frac{dy}{ds} .$$

Производную  $\frac{dy}{ds}$  найдемъ изъ слѣдующаго уравненія, выражающаго дугу  $s$  циклоиды въ зависимости отъ діаметра  $l$  производящаго круга и ординаты  $y$

$$s^2 = 4 \cdot l \cdot y ; \quad *)$$

Дифференцируя, находимъ:

$$2 \cdot s \cdot ds = 4 \cdot l \cdot dy ,$$

откуда

$$\frac{dy}{ds} = \frac{s}{2l} ;$$

\*) Циклоида (черт. 70) задается уравненіями:

$$x = \frac{1}{2} l (\theta + \sin \theta) ,$$

$$y = \frac{1}{2} l (1 - \cos \theta) ;$$

откуда, для дифференціала дуги по формулѣ:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} ,$$

находимъ

$$ds = l \cos \frac{\theta}{2} \cdot d\theta ;$$

интегрируя, получаемъ:

$$s = 2 \cdot l \cdot \sin \frac{\theta}{2} ;$$

слѣдовательно

$$s^2 = 4 l^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 4 l \cdot \frac{1}{2} l (1 - \cos \theta) = 4 l y .$$

значитъ:

$$F_{\cos}(F, g) = \pm \frac{mg}{2l} s,$$

и дифференціальное уравненіе движенія (13) можемъ написать въ видѣ

$$\pm m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \mp \frac{mg}{2l} \cdot s.$$

Раздѣляя обѣ части этого уравненія при верхнихъ знакахъ (при движеніи дуга  $s$  возрастаетъ) на  $+m$ , а при нижнихъ знакахъ (дуга  $s$  убываетъ) на  $-m$ , мы получимъ для движенія точки какъ вправо, такъ и влево, одно и то же уравненіе:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{g}{2l} \cdot s \dots \dots \dots (13')$$

Замѣчаемъ, что совершенно такого же вида дифференціальное уравненіе мы рассматривали уже въ случаѣ прямолинейнаго движенія точки подъ вліяніемъ силы притяженія къ неподвижному центру, пропорціональной расстоянію. Изъ уравненія:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 \cdot x,$$

мы нашли:

$$x = x_0 \cdot \cos kt + \frac{x_0'}{k} \cdot \sin kt.$$

Интегрируя уравненіе (13'), мы, очевидно, придемъ къ подобному же результату, и поэтому можемъ сразу написать второй интегралъ нашей задачи:

$$s = s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{2l}} t + s_0' \sqrt{\frac{2l}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{2l}} t.$$

Это уравненіе выражаетъ гармоническое колебаніе точки, амплитуда котораго равна

$$\sqrt{s_0^2 + \frac{2l}{g} \cdot s_0'^2}.$$

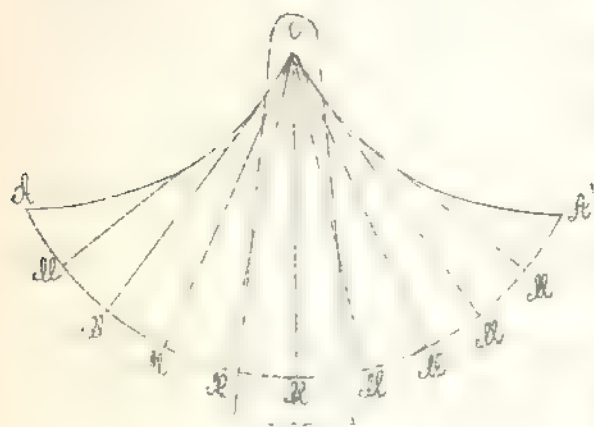
Примем крайнее положеніе точки, при которомъ скорость ея равна нулю, за начальное положеніе; тогда  $s'_0 = 0$ , амплитуда  $= s_0$ , и уравненіе движенія представится въ болѣе простомъ видѣ:

$$s = s_0 \cos \sqrt{\frac{g}{2l}} t.$$

Продолжительность одного размаха циклоидальнаго маятника будетъ:

$$T = \pi \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

Такимъ образомъ, мы видимъ, что амплитуда колебаній тяжелой точки на циклоидѣ на продолжительность размаха никакого вліянія не имѣетъ, слѣдательно, циклоидальный маятникъ совершаетъ изохронныя колебанія, тогда какъ колебанія круговаго маятника, какъ было выше указано, не изохронны.



Чертежъ 71.

тнваетъ  $AOA'$  и, слѣдательно, точка  $M$  описываетъ циклоиду  $AOA'$ .

Циклоидальный маятникъ былъ построенъ Гийансомъ; металлическая изогнутая пластинка  $AOA'$  (черт. 71) представляетъ развертку циклоиды  $AOA'$ ; въ точкѣ  $O$  прикреплена нить  $OM$  длины  $2l$ , на концѣ которой находится тяжелый шарикъ  $M$ ; при движеніи шарика  $M$  нить обер-

§ 6. Равновѣсіе матеріальной точки на гладкой кривой.

Уравненія равновѣсія точки на гладкой кривой:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0, \\ f_2(x, y, z) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

получаются изъ дифференціальньихъ уравненій (2), если положить ускореніе точки равнымъ нулю. Уравненія эти будутъ.

$$X + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0,$$

$$Y + \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0,$$

$$Z + \frac{\partial f_1}{\partial z} \frac{\partial f_2}{\partial z} + \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0.$$

Условія равновѣсія можемъ также получить и изъ уравненія

$$m \frac{dv}{dt} = F_1 \cos(F, \tau);$$

полагая, что  $\frac{dv}{dt} = 0$ , найдемъ

$$F \cos(F, \tau) = 0,$$

откуда слѣдуетъ, что для равновѣсія точки на гладкой кривой необходимо и достаточно, чтобы данная сила, приложенная къ точкѣ, была перпендикулярна къ касательной, т.е., чтобы она заключалась въ нормальной плоскости кривой.

§ 7. Дифференціальныя уравненія движенія точки по негладкой кривой.

Когда точка движется по негладкой кривой, тогда, кромѣ нормальной реакціи  $R$ , на точку будетъ дѣйствовать еще сила тренія, направленная по касательной къ кривой въ сторону, про-

тивноположнуу скорости, и по величинѣ равная абсолютной величинѣ нормальной реакціи, помноженной на коэффициентъ динамическаго тренія ( $k$ ).

Принимая во вниманіе силу тренія, мы, на основаніи уравненія (7), получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія движенія точки по негладкой кривой:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F \cos(F, T) - k |R|, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F \cos(F, X) + R \cos(R, X), \\ 0 &= F \cos(F, Z) + R \cos(R, Z). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

Такимъ образомъ, сила тренія входитъ только въ первое изъ уравненій движенія (14).

Для положенія покоя точки на негладкой кривой мы получимъ три уравненія изъ уравненій (14), полагая  $v = 0$  и замѣняя коэффициентъ динамическаго тренія коэффициентомъ статическаго тренія.

-----

## КИНЕТИКА СИСТЕМЫ ТОЧЕК.

### ГЛАВА I.

#### СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК.

Системой материальных точек называется такая совокупность материальных точек, въ которой движеніе каждой точки зависитъ отъ движеній или положеній всѣхъ остальныхъ точекъ\*).

Эта зависимость обуславливается *связями*, которыя бываютъ двухъ родовъ: *динамическія* и *кинематическія*.

*Динамическія* связи образуются *силами* (*взаимодѣйствіемъ*), приложенными къ точкамъ системы.

Примѣръ такой системы, въ которой существуютъ только динамическія связи, представляетъ система изъ двухъ материальныхъ точекъ, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Движеніе точки  $M_1$  зависитъ отъ движенія точки  $M_2$ , потому что дѣйствующая сила ( $\frac{k m_1 m_2}{r^2}$ ) по величинѣ и направленію зависитъ отъ положенія точки  $M_2$ ; подобнымъ же образомъ движеніе точки  $M_2$  зависитъ отъ движенія точки  $M_1$ .

Система, подчиненная только динамическимъ связямъ, нази-

---

\*) Согласно этому опредѣленію совокупность, напримеръ, свободныхъ материальныхъ точекъ, подверженныхъ дѣйствію только силы тяжести, не образуетъ системы.



нается системой свободных материальных точек.

Наибъйшій примѣръ такой системы представляетъ солнечная система, если солнце, планеты и ихъ спутники будемъ разсматривать, какъ матеріальныя точки.

Кинематическая связь выражается нѣкоторымъ уравненіемъ, которому должны удовлетворять координаты точекъ системы.

Будемъ обозначать точки системы буинами

$$M_1, M_2, M_3, \dots M_n, \dots M_n;$$

массы ихъ соотвѣтственно

$$m_1, m_2, m_3, \dots m_i, \dots m_n,$$

а координаты:

$$x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3, \dots x_i, y_i, z_i, \dots x_n, y_n, z_n.$$

( $n$  обозначаетъ число точекъ системы), тогда кинематическая связь, которой подчинена система, выражается уравненіемъ, вида

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots x_n, y_n, z_n) = 0$$

Простѣйшій примѣръ системы, въ которой существуетъ кинематическая связь, представляетъ двѣ точки  $M_1$  и  $M_2$ , соединенныя между собой стержнемъ. Здѣсь имѣемъ слѣдующее уравненіе кинематической связи:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

ясно, что движеніе одной точки зависитъ отъ движенія другой точки\*).

\*) Замѣтимъ, что кинематическая связь можетъ выражаться уравненіемъ, соединеннымъ съ неравенствомъ. Примѣръ такой связи представляетъ такая нить, связывающая двѣ точки: въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть:

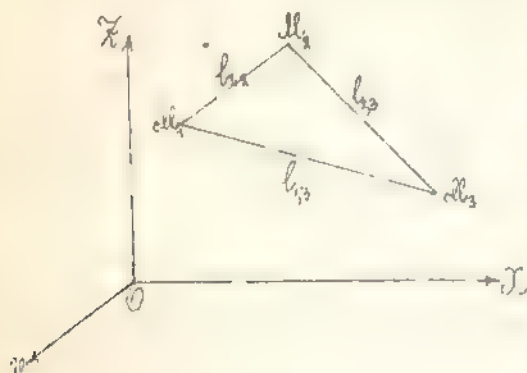
$$l^2 - [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2] > 0,$$

гдѣ  $l$  длина нити.

Далѣе, замѣтимъ, что уравненія связей могутъ содержать вре-

Система, въ которой разстояніе между каждаи двумя точками остается постояннымъ, называется неизмѣняемой.

Пусть неизмѣняемая система состоитъ изъ трехъ точекъ  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ , соединенныхъ между собой стержнями  $l_{1,2}$ ,  $l_{2,3}$ ,  $l_{3,1}$  (черт. 72); для этой системы существуютъ три кинематическія связи:



Чертень 72.

$$\begin{aligned}(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_{1,2}^2 &= 0, \\(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - l_{2,3}^2 &= 0, \\(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - l_{3,1}^2 &= 0.\end{aligned}$$

Легко видѣть, что представляя къ системѣ изъ трехъ

точекъ послѣдовательно по одной точки, мы должны, для того, чтобы система оставалась неизмѣняемой, каждую новую точку соединить стержнями съ тремя изъ предыдущихъ; такимъ образомъ, присоединеніе каждой точки къ неизмѣняемой системѣ увеличитъ число кинематическихъ связей на три.

Если имѣемъ неизмѣняемую систему изъ  $n$  точекъ, то первая три изъ нихъ дадутъ три кинематическія связи, а остальные  $(n-3)$  точки дадутъ  $3(n-3)$  связей, всего, значить, будетъ  $(3n-6)$  связей. Отсюда слѣдуетъ, что число кинематическихъ связей, необходимыхъ для того, чтобы система была неизмѣняемой, на шесть меньше числа координатъ всѣхъ точекъ системы.

.....  
ия  $t$ ; такой примеръ представляемъ для матеріальной точки, связанной сферическимъ, который увеличивается пропорціонально времени, такъ что:

$$\begin{aligned}l &= a + bt, \\(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - (a + bt)^2 &= 0\end{aligned}$$

Въ системѣ матеріальныхъ точекъ можетъ существовать вообще  $k$  кинематическихъ связей:

$$f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$

$$f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$

$$f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0.$$

причемъ число  $k$  должно быть непремѣнно меньше  $3n$ , числа координатъ точекъ системы.

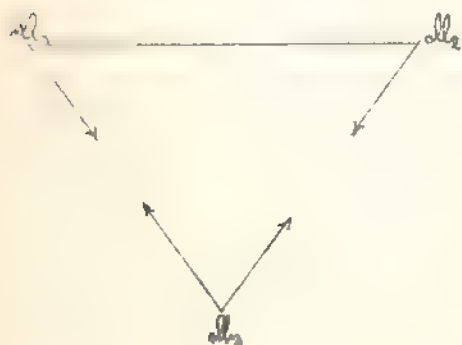
Если бы  $k = 3n$ , то мы имѣли бы столько уравненій, сколько координатъ: рѣшая эти уравненія мы нашли бы для координатъ постоянныя значенія, слѣдовательно, система осталась бы въ покое, а не двигалась.

Если бы  $k > 3n$ , то нѣкоторыя изъ уравненій связей были бы слѣдствіемъ остальныхъ или противорѣчили бы имъ.

Въ случаѣ неизмѣняемой системы мы имѣемъ

$$k = 3n - 6 \text{ связей.}$$

Замѣтимъ, что существуютъ системы, подчиненныя одновременно и динамическимъ и кинематическимъ связямъ; такой примѣръ представляютъ три матеріальныхъ точки, изъ которыхъ двѣ,



связанныя стержнемъ, притягиваютъ третью и сами къ ней притягиваются по закону Ньютона (черт.73). Система, подчиненная кинематическимъ связямъ, называется *системою несвободныхъ матеріальныхъ точекъ*.

Чертежъ 73.

Весьма важный случай (частный) системы несвободныхъ матеріальныхъ точекъ, именно,

неизмѣняемую систему, представляетъ твердое тѣло.

Въ самомъ дѣлѣ, въ Механикѣ твердымъ тѣломъ называется такое тѣло, въ которомъ разстояніе между какими двумя точками остается неизмѣннымъ; раздѣляя твердое тѣло на бесконечно малыя части, наприимѣръ, плоскостями, параллельными координатнымъ плоскостямъ, и замѣняя каждую изъ этихъ частей матеріальной точкой, масса которой равна массѣ соответствующей части, мы можемъ твердое тѣло разсматривать какъ систему бесконечно большого числа ( $n \rightarrow \infty$ ) матеріальныхъ точекъ съ бесконечно малыми массами, взаимныя разстоянія которыхъ остаются неизмѣнными.

Тѣла гибкія, упругія, жидкости, газы и, вообще, всѣ тѣла природы и ихъ совокупности также могутъ быть разсматриваемы, какъ частные виды системы матеріальныхъ точекъ; поэтому предложенія кинетики системы имѣютъ общее значеніе для всѣхъ тѣлъ природы.

Замѣтимъ, что и одна матеріальная точка, движеніе которой мы изучали, можетъ быть разсматриваема какъ частный случай системы, при  $n=1$ .

## Г Л А В А II.

### ДВИЖЕНІЕ СИСТЕМЫ СВОБОДНЫХЪ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.

#### § 1. Дифференціальныя уравненія движенія.

Пусть дана система, состоящая изъ  $n$  свободныхъ матеріальныхъ точекъ:

$$M_1, M_2, M_3, M_4, \dots \dots M_n.$$

Кромѣ силъ, необходимыхъ для того, чтобы точки образовали систему, къ точкамъ могутъ быть приложены всякія другія силы. Очевидно, всѣ силы, приложенныя къ какой-либо точкѣ, можемъ замѣнить одной силой: ихъ равнодѣйствующей.

Пусть эти равнодѣйствующія, приложенныя къ точкамъ системы, соотвѣтственно будутъ:

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_n;$$

а проекціи ихъ на координатныя оси:

$$X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3, \dots, X_n, Y_n, Z_n.$$

Мы видѣли, что въ случаѣ одной матеріальной точки сила, къ ней приложенная, а слѣдовательно, и проекціи ея зависятъ, вообще говоря, отъ времени, отъ положенія и скорости точки. Въ случаѣ же системы матеріальныхъ точекъ (какъ это слѣдуетъ изъ самаго опредѣленія системы) равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ каждой точкѣ, зависитъ не только отъ времени и отъ положенія и скорости этой точки, но также отъ положеній и скоростей другихъ точекъ, — по крайней мѣрѣ, отъ положенія или скорости одной изъ другихъ точекъ. Такимъ образомъ, проекціи равнодѣйствующихъ  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$  суть, вообще говоря, функція отъ  $6n+1$  переменныхъ:  $t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n$ .

Принимая основныя начала кинетики къ каждой точкѣ системы, мы получимъ для каждой изъ нихъ три дифференціальныя уравненія движенія, взявши точку съ указателемъ  $i$ , получимъ

$$\left. \begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i, \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i, \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i. \end{aligned} \right\}$$

Придавая указателю  $i$  последовательно значения: 1, 2, 3, ...,  $3n$ , получим  $3n$  дифференциальных уравнений движения системы свободных материальных точек:

$$m_1 \ddot{x}_1 = X_1, m_1 \ddot{y}_1 = Y_1, m_1 \ddot{z}_1 = Z_1, m_2 \ddot{x}_2 = X_2, m_2 \ddot{y}_2 = Y_2, \dots, m_n \ddot{z}_n = Z_n \quad (A)$$

Таким образом, определение движения системы свободных точек при действии данных сил приводится къ интегрированию системы  $3n$  совокупных дифференциальных уравнений второго порядка.

Для решения этой задачи нужно найти  $6n$  интеграловъ уравнений (A):  $3n$  первыхъ и  $3n$  вторыхъ интеграловъ, содержащихъ  $6n$  постоянныхъ произвольныхъ.

Первые интегралы будутъ равенства вида:

$$\Phi_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \dots, x_n, x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, \dots, x'_n, t) = C_j,$$

гдѣ  $j = 1, 2, 3, \dots, 3n$ ; вторые интегралы:

$$\Psi_j(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \dots, x_n, x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, \dots, x'_n, t, C_1, C_2, \dots, C_n) = D_j,$$

гдѣ  $j = 1, 2, 3, 4, \dots, 3n$ , и

$$C_1, C_2, C_3, \dots, C_{3n}, D_1, D_2, \dots, D_{3n}$$

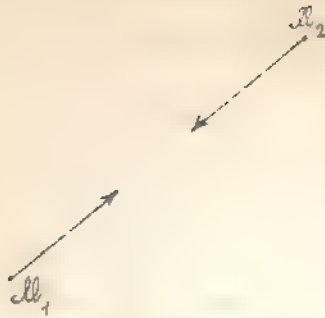
обозначаютъ постоянныя произвольныя.

Эти постоянныя опредѣляемъ, зная начальныя положенія и начальныя скорости точекъ системы, которыя могутъ быть заданы какъ угодно.

## § 2. Задача двухъ телъ.

Разсмотримъ движение системы, состоящей изъ двухъ свободныхъ точекъ  $M_1$  и  $M_2$ , взаимно притягивающихся по закону Ньютона.





Важнѣйшій случай такого движенія представляетъ движеніе солнца и земли, если не принимать во вниманіе силъ притяженія отъ другихъ тѣлъ солнечной системы.

Пусть массы точекъ будутъ соответственно  $m_1$  и  $m_2$ , а координаты

Торнохъ 74.  $x_1, y_1, z_1$  и  $x_2, y_2, z_2$ ; тогда величина дѣйствующихъ силъ равна:

$$\frac{k^2 m_1 m_2}{r^2},$$

гдѣ

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Замѣчая, что cosinus'ы угловъ, образуемыхъ направленіемъ силъ, съ осями координатъ равны:

$$\pm \frac{x_2 - x_1}{r}, \pm \frac{y_2 - y_1}{r}, \pm \frac{z_2 - z_1}{r},$$

гдѣ знакъ + соответствуетъ силѣ, приложенной къ точкѣ  $M_1$ , а знакъ - силѣ, приложенной къ точкѣ  $M_2$ , мы получимъ слѣдующія дифференціальныя уравненія движенія системы:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1'' &= - \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (x_1 - x_2), \\ m_1 y_1'' &= - \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (y_1 - y_2), \\ m_1 z_1'' &= - \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (z_1 - z_2). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 x_2'' &= - \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (x_2 - x_1), \\ m_2 y_2'' &= - \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (y_2 - y_1), \\ m_2 z_2'' &= - \frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (z_2 - z_1), \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

Посредством сложения получимъ изъ уравненій (1) и (1<sub>1</sub>):

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1'' + m_2 x_2'' &= 0, \\ m_1 y_1' + m_2 y_2' &= 0, \\ m_1 x_1' + m_2 x_2' &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Интегрируя каждое изъ уравненій (2), найдемъ три первыхъ интеграла:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1' + m_2 x_2' &= C_1, \\ m_1 y_1' + m_2 y_2' &= C_2, \\ m_1 x_1' + m_2 x_2' &= C_3. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

гдѣ  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  постоянныя произвольныя.

Интегрируя каждое изъ уравненій (3), найдемъ три вторыхъ интеграла:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 + m_2 x_2 &= C_1 t + D_1, \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 &= C_2 t + D_2, \\ m_1 x_1 + m_2 x_2 &= C_3 t + D_3. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

гдѣ  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  — постоянныя произвольныя.

Шесть постоянныхъ произвольныхъ  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  опредѣляются по начальнымъ даннымъ.

Обозначимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} &= x_c, \\ \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} &= y_c, \\ \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} &= x_c. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Геометрическая точка, опредѣляемая координатами  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$ , дѣлитъ разстояніе  $ll_1$  на части обратно пропорціональныя массамъ  $m_1$  и  $m_2$  — она называется *центромъ инерціи* раз-

рассматриваемой системы \*).

На основании уравнений (5) и (3) находим:

$$\left. \begin{aligned} x'_c &= -\frac{C_1}{m_1 + m_2}, \\ y'_c &= \frac{C_2}{m_1 + m_2}, \\ z'_c &= \frac{C_3}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнения (6) показывают, что скорость центра инерции рассматриваемой системы постоянна по величине и направлению, отсюда заключаем, что центр инерции движется прямолинейно и равномерно; если начальные скорости точек таковы, что постоянные  $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ , тогда центр инерции остается в покое.

Из уравнений (5) и (4) следует:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{C_1}{m_1 + m_2} t + \frac{D_1}{m_1 + m_2}, \\ y_c &= \frac{C_2}{m_1 + m_2} t + \frac{D_2}{m_1 + m_2}, \\ z_c &= \frac{C_3}{m_1 + m_2} t + \frac{D_3}{m_1 + m_2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Если хотя одна из постоянных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  не равна нулю, уравнения (6) выражают прямолинейное и равномерное движение центра инерции системы.

Перенесем начало координат в центр инерции, не изгибая направления координатных осей. Если новые координаты точек

---

\*) Запомним, что если  $M_1$  и  $M_2$  были точки массы, то координаты  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  определяли их центр тяжести, и следовательно, центр тяжести двух точек совпадает с их центром инерции.

$M_1$  и  $M_2$  обозначим соответственно через  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  и  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$ , то будем иметь:

$$x_1 = x_c + \xi_1,$$

$$y_1 = y_c + \eta_1,$$

$$z_1 = z_c + \zeta_1;$$

и

$$x_2 = x_c + \xi_2,$$

$$y_2 = y_c + \eta_2,$$

$$z_2 = z_c + \zeta_2.$$

Принимая во внимание, что ускорение центра инерции равно нулю, и, следовательно,  $x_c'' = y_c'' = z_c'' = 0$ , получаем из уравнений (1) и (1<sub>1</sub>) дифференциальные уравнения движения системы в новых координатах:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \xi_1'' &= -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (\xi_1 - \xi_2), \\ m_1 \eta_1'' &= -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (\eta_1 - \eta_2), \\ m_1 \zeta_1'' &= -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (\zeta_1 - \zeta_2). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1')$$

и

$$\left. \begin{aligned} m_2 \xi_2'' &= -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (\xi_2 - \xi_1), \\ m_2 \eta_2'' &= -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (\eta_2 - \eta_1), \\ m_2 \zeta_2'' &= -\frac{k^2 m_1 m_2}{r^3} (\zeta_2 - \zeta_1). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1'')$$

В уравнениях (1') и (1'')

$$r = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2}.$$

На основании уравнений (5) находим:

$$(m_1 + m_2) \cdot x_c = m_1 (x_c + \xi_1) + m_2 (x_c + \xi_2),$$

$$(m_1 + m_2) \cdot y_c = m_1 (y_c + \eta_1) + m_2 (y_c + \eta_2),$$

$$(m_1 + m_2) \cdot z_c = m_1 (z_c + \zeta_1) + m_2 (z_c + \zeta_2);$$

откуда получаемъ уравненія, выражающія связь между новыми координатами точекъ  $M_1$  и  $M_2$ .

$$\left. \begin{aligned} m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 &= 0, \\ m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 &= 0, \\ m_1 \zeta_1 + m_2 \zeta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Изъ уравненій (8) находимъ.

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{m_2}{m_1} \xi_2, \\ \eta_1 &= -\frac{m_2}{m_1} \eta_2, \\ \zeta_1 &= -\frac{m_2}{m_1} \zeta_2. \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (8')$$

и

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= -\frac{m_1}{m_2} \xi_1, \\ \eta_2 &= -\frac{m_1}{m_2} \eta_1, \\ \zeta_2 &= -\frac{m_1}{m_2} \zeta_1. \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (8'')$$

Подставляя въ уравненія (1') вмѣсто координатъ точки  $M_2$  ихъ выраженія черезъ координаты точки  $M_1$  изъ уравненій (8'), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \xi_1' &= -\frac{k^2 m_1 (m_1 + m_2)}{r^3} \xi_1, \\ m_1 \eta_1' &= -\frac{k^2 m_1 (m_1 + m_2)}{r^3} \eta_1, \\ m_1 \zeta_1' &= -\frac{k^2 m_1 (m_1 + m_2)}{r^3} \zeta_1. \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (1'')$$

гдѣ

$$r = \sqrt{\left(\frac{e}{m_1 + m_2} \xi^2 + \left(\eta + \frac{m_1}{m_2} \eta_1\right)^2 + \left(\zeta + \frac{m_1}{m_2} \zeta_1\right)^2} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

Очевидно,  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$  есть разстояніе точки  $M_1$  отъ центра инерціи (начала координатъ); обозначимъ его черезъ  $\xi_1$ ; тогда

$$r = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \xi_1,$$

и уравненія (1") примутъ видъ:

$$m_1 \ddot{\xi} = - \frac{k^2 m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\xi}{\xi_1^3},$$

$$m_1 \ddot{\eta} = - \frac{k^2 m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\eta}{\xi_1^3},$$

$$m_1 \ddot{\zeta} = - \frac{k^2 m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\zeta}{\xi_1^3}.$$

Сокращая эти уравненія на  $m_1$  и обозначая коэффициентъ  $\frac{k^2 m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$  черезъ  $k_1$ , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} &= - \frac{k_1}{\xi_1^3} \xi, \\ \ddot{\eta} &= - \frac{k_1}{\xi_1^3} \eta, \\ \ddot{\zeta} &= - \frac{k_1}{\xi_1^3} \zeta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Поступая совершенно подобнымъ же образомъ съ уравненіями (1'), т. е. подставляя въ нихъ вмѣсто координатъ точки  $M_1$ , ихъ выраженія изъ уравненій (8") черезъ координаты точки  $M_2$  и обозначая затѣмъ разстояніе  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$  точки  $M_2$  отъ центра инерціи (начала координатъ) черезъ  $\xi_2$ , получимъ:

$$m_2 \ddot{\xi} = - \frac{k^2 m_2 m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\xi}{\xi_2^3},$$



$$m_2 \ddot{x}_2 = \frac{k^2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{x_2}{\rho_2^3},$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = \frac{k^2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{z_2}{\rho_2^3},$$

откуда, вводя обозначеніе

имѣемъ:

$$\frac{k^2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = k_2^2,$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_2 &= - \frac{k_2^2 x_2}{\rho_2^3}, \\ \ddot{y}_2 &= - \frac{k_2^2 y_2}{\rho_2^3}, \\ \ddot{z}_2 &= - \frac{k_2^2 z_2}{\rho_2^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

Полученныя нами уравненія (9) и (10), показываютъ, что точки  $M_1$  и  $M_2$  совершаютъ относительно ихъ центра инерціи такіа движенія, какія совершаютъ двѣ точки, притягиваемыя къ неподвижному началу координатъ: первая силой:

$$F_1 = \frac{k_1 m_1}{\rho_1^2}$$

вторая силой:

$$F_2 = \frac{k_2 m_2}{\rho_2^2}.$$

Такимъ образомъ, наша задача свелась къ двумъ задачамъ - каждая о движеніи одной точки, притягиваемой къ неподвижному центру по закону Ньютона; а эту задачу мы уже подробно исследовали въ курсѣ Кинетики точки.

Пользуясь интеграломъ живой силы и интеграломъ площадей, мы такъ нашли, что движеніе точки, притягиваемой по закону Ньютона, совершается по коническому сѣченію.

Изъ всего вышеизложеннаго можемъ сдѣлать слѣдующее заключеніе: при движеніи двухъ точекъ, взаимнопритягивающихся по

закону Ньютона, центр инерции их движется прямолинейно и равномерно, — в частномъ случаѣ остается въ покой, а каждая точка описываетъ около центра инерции коническое сѣченіе такими же образомъ, какъ если бы центр инерции былъ неподвиженъ и притягивалъ точку по закону Ньютона.

Такимъ образомъ, въ вышеупомянутомъ случаѣ системы, состоящей изъ земли и солнца, какъ земля, такъ и солнце описываютъ эллипсы вокругъ ихъ центра инерции, принимая во вниманіе, что масса солнца въ 327.000 разъ болѣе массы земли, а среднее разстояніе земли отъ солнца равно  $149 \times 10^6$  километровъ, найдемъ, что центр инерции системы будетъ отстоять отъ центра солнца всего на 460 килом., поэтому размѣры эллиптической орбиты солнца столь малы по сравненію съ размѣрами эллиптической орбиты земли, что во многихъ случаяхъ мы можемъ считать солнце неподвижнымъ

Разсмотрѣнная нами задача представляется и тогда, когда мы опредѣляемъ движенія земли и луны подѣ влияніемъ ихъ взаимнаго притяженія, масса земли только въ 81 разъ болѣе массы луны и ихъ взаимное разстояніе измѣняется отъ 407.000 до 357.000 километровъ.

### Г Л А В А III.

#### *ДВИЖЕНІЕ СИСТЕМЫ ВЕСВОБОДНЫХЪ МАТЕРІАЛЬНЫХЪ ТОЧЕКЪ.*

##### *§ 1. Кинематическія связи; условія для скорости и ускоренія.*

Мы видѣли, что система  $n$  несвободныхъ матеріальныхъ точекъ подчинена, по крайней мѣрѣ, одной кинематической связи

выражаемой уравненіемъ вида:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Такихъ кинематическихъ связей система можетъ имѣть вообще  $k$ , причеъ  $k < 3n$  \*).

Число  $3n - k$  называется числомъ степеней свободы системы; такъ, напримѣръ, свободное твердое тѣло имѣетъ шесть степеней свободы  $3n - (3n - 6) = 6$  твердое тѣло, одна точка котораго неподвижна, имѣетъ три степени свободы: твердое тѣло, имѣющее неподвижную ось, обладаетъ только одной степенью свободы.

Существованіе кинематической связи влечетъ за собою два условія: одному должны удовлетворять скорости, а другому ускоренія точекъ системы.

Чтобы вывести эти условія, замѣтимъ, что когда мы въ уравненіе (1) кинематической связи подставимъ вмѣсто координатъ точекъ ихъ выраженія въ функціяхъ времени, то это уравненіе должно обратиться въ тождество, а если функція тождественно равна нулю, то и всѣ ея производныя по времени равны нулю:

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = 0, \quad \text{и т. д.}$$

Раскрывая первую производную, получимъ условіе, которому должны удовлетворять проекціи скоростей точекъ системы:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} z'_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x'_n = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{3n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} z'_i \right) = 0, \dots \dots \dots (2)$$

\*) Вътъ необходимости въ томъ, чтобы всѣ  $3n$  координатъ входили въ каждое изъ  $k$  уравненій связей. возможна, напримѣръ, что координата  $x$ , входитъ только въ одно изъ этихъ уравненій, нѣкоторыя координаты могутъ не входить ни въ одно изъ уравненій связей.

гдѣ  $i = 1, 2, 3,$

$n$

Раскрывая вторую производную  $\frac{d^2 f}{dt^2}$ , получимъ условие, которому должны удовлетворять проекціи ускореній точекъ системы

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'' + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_1'' + \frac{\partial f}{\partial z_1} z_1'' + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'' + f^{(2)} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial f}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial f}{\partial z_i} z_i'' \right) + f^{(2)} = 0, \dots \dots \dots (3)$$

гдѣ  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , а  $f^{(1)}$  обозначаетъ совокупность остальныхъ членовъ выраженія второй производной.  $f^{(1)}$  есть функція второй степени относительно проекцій скоростей точекъ системы; символически функція  $f^{(2)}$  можетъ быть представлена въ видѣ:

$$\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial}{\partial z_i} z_i' \right) \right]^2 f,$$

если условиться, что послѣ возвышенія въ квадратъ и умноженія на  $f$ ,  $\partial^2 f$  будетъ обозначать вторую частную производную отъ функція  $f$ .

Если система подчинена  $k$  кинематическимъ связямъ, то будутъ существовать  $k$  условій вида (2) для проекцій скоростей и  $k$  условій вида (3) для проекцій ускореній точекъ системы.

## § 2. Общія уравненія движенія системы несвободныхъ матеріальныхъ точекъ.

Такъ какъ кинематическая связь заставляютъ ускоренія точекъ системы удовлетворять некоторому условию, то она должна означать на каждую точку системы некоторую силу, называемую реакціей связи.

Въ самомъ дѣлѣ, ускоренія точекъ системы зависятъ отъ дѣйствующихъ силъ, но задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ,

могутъ быть такіа, что при дѣйствіи ихъ однихъ ускоренія, опредѣляемыя изъ уравненій ( $A$ ) стр 229, не будутъ удовлетворять условію (3), а въ такомъ случаѣ необходимо допустить существованіе со стороны кинематической связи силъ (реакцій), при дѣйствіи которыхъ, въ совокупности съ задаваемыми силами, точки системы получаютъ ускоренія, удовлетворяющія условію (3).

Если имѣется  $k$  кинематическихъ связей, то въ каждой точкѣ системы, кромѣ задаваемыхъ силъ, приложены еще  $k$  реакцій этихъ связей.

Присоединяя къ даннымъ силамъ реакціи связей, мы можемъ разсматривать каждую точку системы, какъ свободную, и примѣнять къ каждой изъ нихъ основныя начала кинетики.

Обозначимъ курсивной буквой  $\mathcal{F}_i$  равнодѣйствующую даннымъ силамъ, приложеннымъ къ точкѣ  $M_i$ , и реакцій всѣхъ связей на точку  $M_i$ , а проекціи этой равнодѣйствующей курсивными буквами:  $\mathcal{X}_i$ ,  $\mathcal{Y}_i$ ,  $\mathcal{Z}_i$ ; тогда для каждой изъ точекъ системы можемъ написать три дифференціальныя уравненія движенія вида\*):

$$\left. \begin{aligned} m_i x_i'' &= \mathcal{X}_i, \\ m_i y_i'' &= \mathcal{Y}_i, \\ m_i z_i'' &= \mathcal{Z}_i. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Придавая указателю  $i$  послѣдовательно значенія 1, 2, 3,  $n$ , получимъ  $3n$  дифференціальныя уравненія движенія системы несвободныхъ матеріальныхъ точекъ.

---

\*) Вводимъ курсивныя буквы для того, чтобы равнодѣйствующую даннымъ силамъ и реакцій, приложенныхъ къ точкѣ  $M_i$  можно отличить отъ равнодѣйствующей однимъ даннымъ силамъ, приложенныхъ къ этой точкѣ.

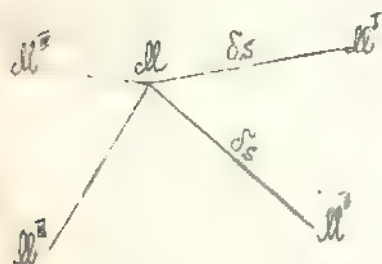
### § 3. "Возможныя перемещенія" или "виртуальныя отклоненія" точекъ системы.

Въ кинетикѣ точки мы различали поверхности гладкія (безъ тренія) и поверхности негладкія (съ треніемъ), подобнымъ же образомъ и въ кинетикѣ системы точекъ мы можемъ раздѣлить связи на два класса: связи идеальныя и связи съ треніемъ.

Чтобы установить различіе между связями этихъ двухъ классовъ введемъ новое понятіе о "возможныхъ перемещеніяхъ" или "виртуальныхъ отклоненіяхъ" точекъ системы

"Возможное перемещеніе" или "виртуальное отклоненіе" свободной матеріальной точки есть всякій бесконечно малый векторъ, представляющій бесконечно малое отклоненіе точки отъ положенія, ей занимаемаго.

"Возможное перемещеніе" точки  $M(x, y, z)$ , будемъ обозначать черезъ  $\delta s$ , а проекціи его на координатныя оси черезъ  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  (черт. 75). Въ случаѣ свободной точки бесконечно малая величина:  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , произвольна.



Чертежъ 75.

Если же точка находится на поверхности  $f(x, y, z) = 0$  (черт. 76), то "возможныхъ перемещеніемъ"

мы называемъ такое бесконечно малое перемещеніе, проекціи котораго удовлетворяютъ уравненію:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0.$$



Раздѣляя обѣ части этого уравненія на

$$\Delta f = + \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}$$

и замѣчая, что cosinus'ы угловъ, образуемыхъ нормалью  $N$  къ поверхности съ осями координатъ, равны:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\Delta f}, \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\Delta f}, \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\Delta f}$$

получимъ:

$$\delta x \cos(N, X) + \delta y \cos(N, Y) + \delta z \cos(N, Z) = 0;$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\delta z \cos(\delta z, N) = 0,$$

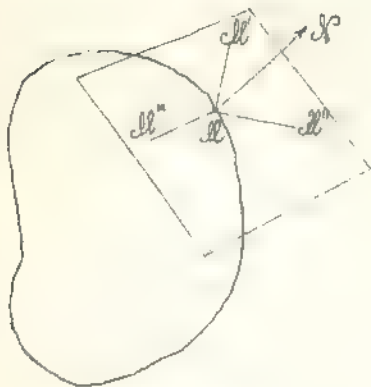
т.е., что

$$\delta z \perp N.$$

Такимъ образомъ "возможное перемѣщеніе" точки, находящейся на поверхности, есть всякое безконечно - малое отклоненіе отъ положенія, ею занимаемаго, въ касательной плоскости.

Когда точка находится на кривой линіи, уравненія которой:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0, \\ f_2(x, y, z) &= 0, \end{aligned}$$



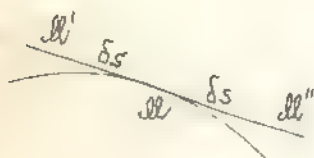
Чертежъ 76.

то "возможными перемѣщеніями" точки мы называемъ такое безконечно-малое перемѣщеніе, проекція котораго удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z} \delta z &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z} \delta z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Эти два уравнения выражаютъ, что "возможное перемѣщеніе" должно составлять прамые углы съ нормальми къ обѣимъ поверхностямъ, опредѣляющимъ кривую; слѣдовательно, "возможное перемѣщеніе" точки, находящейся на кривой, есть всякое безконечно малое отклоненіе отъ положенія, ея занимаемаго, по касательной къ кривой (черт. 77).

Очевидно, что перемѣщеніе  $\delta s$  точки, находящейся на поверхности или на кривой, строго говоря, не есть возможное перемѣщеніе\*), поэтому  $\delta s$  часто называютъ иначе. "виртуальнымъ отклоненіемъ" точки; но погрѣшность, которую мы дѣлаемъ, считая это перемѣщеніе возможнымъ, будетъ безконечно малой величиною не ниже второго порядка.



Чертежъ 77.

Пусть имѣемъ систему точекъ, связанныхъ кинематическою связью:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0.$$

Обозначимъ безконечно малыя перемѣщенія: точки  $M_1$  черезъ  $\delta s_1$ ; его проекціи черезъ  $\delta x_1$ ,  $\delta y_1$ ,  $\delta z_1$ ; точки  $M_2$  черезъ  $\delta s_2$  и его проекціи черезъ  $\delta x_2$ ,  $\delta y_2$ ,  $\delta z_2$ , и т. д.; наконецъ, точки  $M_n$  черезъ  $\delta s_n$  и его проекціи черезъ  $\delta x_n$ ,  $\delta y_n$ ,  $\delta z_n$ .

Въ томъ случаѣ, когда точки системы свободны, каковы бы ни были эти безконечно-малыя перемѣщенія, мы называемъ ихъ

\*) Въ случаѣ поверхности мы имѣемъ:

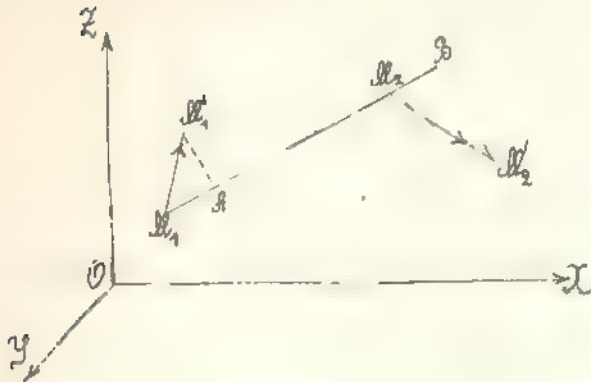
$$f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = f(x, y, z) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z \right) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \delta x \delta y + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \delta x \delta z + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \delta y \delta z + \text{и т. д. члены 3-го и высш. порядк.};$$

указанные члены и выражаютъ величину того нарушенія данной связи, которымъ мы пренебрегаемъ, рассматривая возможное перемѣщеніе точки, находящейся на поверхности.

"возможными перемещениями" или "виртуальными отклонениями".

Если же система не свободна, именно подчинена одной кинематической связи:

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0,$$



Чертеж 78.

то перемещения:  $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \dots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$  мы называем "возможными перемещениями" или "виртуальными отклонениями" точек системы тогда, когда проекции этих перемещений удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \delta z_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n + \frac{\partial f}{\partial y_n} \delta y_n + \frac{\partial f}{\partial z_n} \delta z_n = 0.$$

или короче:

$$\sum_{i=1}^{3n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad (4)$$

Для примера возьмем систему, состоящую из двух точек  $M_1$  и  $M_2$ , связанных стержнем длины  $l$  (черт. 78). Уравнение кинематической связи:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l^2 = 0.$$

Проекции "возможных перемещений" точек  $M_1$  и  $M_2$ , согласно уравнению (4), должны удовлетворять уравнению:

$$-(x_2 - x_1) \delta x_1 - (y_2 - y_1) \delta y_1 - (z_2 - z_1) \delta z_1 + (x_2 - x_1) \delta x_2 + (y_2 - y_1) \delta y_2 + (z_2 - z_1) \delta z_2 = 0; \quad (4')$$

откуда:

$$(x_2 - x_1) \delta x_1 + (y_2 - y_1) \delta y_1 + (z_2 - z_1) \delta z_1 = (x_2 - x_1) \delta x_2 + (y_2 - y_1) \delta y_2 + (z_2 - z_1) \delta z_2.$$

Разделим обе части этого равенства на  $l$ .

Таким образом

$$\frac{x_2 - x_1}{l}, \frac{y_2 - y_1}{l}, \frac{z_2 - z_1}{l},$$

равны синусам углов, которые прямая  $M_1 M_2$  составляет с осями координат, то из уравнения (4) имеем:

$$\delta s_1 \cos(\delta s_1, M_1 M_2) = \delta s_2 \cos(\delta s_2, M_1 M_2).$$

Таким образом в рассматриваемом случае "возможных перемещений" точек  $M_1$  и  $M_2$  будут всякие бесконечно малые перемещения, проекции которых на направление стержня равны между собой.

Если в системе существует не одна кинематическая связь, а несколько, то каждая из них дает для проекций возможных перемещений точек системы условие вида (4) \*).

Совокупность "возможных перемещений" или "виртуальных отклонений" точек системы образует "возможное перемещение" или "виртуальное отклонение" самой системы.

"Возможным перемещением" или "виртуальным отклонением" свободнаго твердаго тѣла, которое мы рассматриваемъ, какъ неизмѣняющую систему матеріальныхъ точекъ, будетъ всякое бесконечно малое отклонение тѣла отъ положенія, имъ занимаемаго.

Если твердое тѣло имѣетъ неподвижную точку, тогда "возможнымъ перемещениемъ" будетъ поворотъ на бесконечно малый уголъ, вокругъ любой оси, проходящей черезъ неподвижную точку.

Если тѣло имѣетъ неподвижную ось, тогда "возможное перемещение" будетъ поворотъ на бесконечно малый уголъ вокругъ этой оси.

\*) Уравненіе (4) для проекцій возможныхъ перемещеній имѣетъ видъ и тогда, когда уравненіе связи  $f = 0$  содержитъ время  $t$  какимъ образомъ

#### § 4. Идеальная связь и связи с трением.

Составим выражение для сумм работ реакций связи (1) на "возможномъ перемѣщеніи" системы.

Обозначимъ реакціи, оказываемыя кинематической связью на точки  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , соответственно через:

$$R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(n)},$$

а проекціи ихъ:

$$X^{(i)}, Y^{(i)}, Z^{(i)}, X^{(2)}, Y^{(2)}, Z^{(2)}, \dots, X^{(n)}, Y^{(n)}, Z^{(n)}.$$

Элементарная работа реакціи  $R^{(i)}$  связи на "возможномъ перемѣщеніи" точки  $M_i$  выразится такъ:

$$X^{(i)} \delta x_i + Y^{(i)} \delta y_i + Z^{(i)} \delta z_i = R^{(i)} \cos(R^{(i)}, \delta s_i),$$

а сумма работъ реакцій на возможномъ перемѣщеніи системы будетъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X^{(i)} \delta x_i + Y^{(i)} \delta y_i + Z^{(i)} \delta z_i) = \sum_{i=1}^{i=n} R^{(i)} \delta s_i \cos(R^{(i)}, \delta s_i) \quad \dots (5)$$

#### Опредѣленіе.

Связь называется идеальной, когда сумма работъ ея реакцій на всякихъ "возможныхъ перемѣщеніяхъ" точекъ системы равна нулю, въ противномъ случаѣ связь называется связью с трениемъ.

Воспользуемся опредѣленіемъ идеальной связи для полученія проекцій ея реакцій на различныя точки системы.

Для идеальной связи, согласно опредѣленію, имѣемъ изъ уравненія (5):

$$\sum_{i=1}^n (X^{(i)} \delta x_i + Y^{(i)} \delta y_i + Z^{(i)} \delta z_i) = 0 \quad \dots (6)$$

Проекціи возможныхъ перемѣщеній при существованіи связи:

$$\delta(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n) = 0 \quad (1)$$

должны удовлетворять уравнению (4):

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0.$$

Умножим обе части этого уравнения на некоторый множитель  $\lambda$ , который пока остается неопределенным:

$$\lambda \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0 \quad \dots \quad (7)$$

Вычитая уравнение (7) из уравнения (6), находим:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \left\{ (X^{(i)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}) \delta x_i + (Y^{(i)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i}) \delta y_i + (Z^{(i)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial z_i}) \delta z_i \right\} = 0 \quad (8)$$

Из  $3n$  проекций возможных перемещений  $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \dots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$ , в силу уравнения (4), одна, например,  $\delta x_1$ , есть функция остальных, которыми можем давать произвольным бесконечно малым значениям \*). Дадим  $\lambda$  такое значение, чтобы в уравнении (8) множитель при  $\delta x_1$  равнялся нулю:

$$X^{(1)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$$

т. е. положим:

$$\lambda = \frac{X^{(1)}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}};$$

тогда у нас останется

$$(Y^{(1)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1}) \delta y_1 + (Z^{(1)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1}) \delta z_1 + (X^{(2)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2}) \delta x_2 + (Y^{(2)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y_2}) \delta y_2 + \dots + (Z^{(n)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial z_n}) \delta z_n = 0. \quad (8')$$

---

\*) Предполагается, что координата  $x_1$  входит в уравнение (1); если бы уравнение (1) не содержало  $x_1$ , мы взяли бы за независимую проекцию одну из величин  $\delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \dots, \delta z_n$ , для которой соответствующая координата входила бы в уравнение (1).



Такъ какъ  $\delta y_1, \delta x_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta x_2 \dots \delta x_n$  величины произвольныя, то, чтобы удовлетворялось уравненіе (8'), коэффициенты передъ ними должны быть равны нулю.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ  $\delta y_1$  не равно нулю, а всѣ остальные  $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n$  равны нулю, тогда получимъ:

$$(Y^{(1)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1}) \delta y_1 = 0,$$

и, слѣдовательно, должно быть:

$$Y^{(1)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0;$$

положимъ затѣмъ  $\delta x_1$  не равно нулю, а  $\delta x_2 = \delta y_2 = \dots \delta x_n = 0$ ; найдемъ:

$$Z^{(1)} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Такимъ образомъ получаемъ слѣдующія выраженія для проекцій реакцій идеальной связи:  $f(x_1, y_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$  :

$$\left. \begin{aligned} X^{(i)} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}, \\ Y^{(i)} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial y_i}, \\ Z^{(i)} &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}. \end{aligned} \right\} \dots \quad (9)$$

гдѣ  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Мы нашли такимъ образомъ, что всѣ проекціи реакцій выражаются частными производными отъ выраженія связи по соответствующимъ координатамъ, умноженными на одинъ и тотъ же множитель.

Найдя выраженія проекцій реакцій, можемъ написать дифференціальныя уравненія движенія системы, подчиненной одной идеальной связи, выражаемой уравненіемъ (1)

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1' &= X_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ m_1 y_1' &= Y_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1}, \\ m_1 z_1' &= Z_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

гдѣ  $i = 1, 2, 3 \dots n$ ; или:

$$\begin{aligned} m_1 x_1' &= X_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1}, \\ m_1 y_1' &= Y_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_1}, \\ m_1 z_1' &= Z_1 + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_1}, \\ m_2 x_2' &= X_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2}, \\ m_2 y_2' &= Y_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial y_2}, \\ m_2 z_2' &= Z_2 + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_2}, \\ m_3 x_3' &= X_3 + \lambda \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ &\dots \dots \dots \\ m_n z_n' &= Z_n + \lambda \frac{\partial f}{\partial z_n}. \end{aligned}$$

Очевидно, если какая либо координата, напримѣръ,  $y_2$ , не входитъ въ уравненіе связи, то соответствующій членъ не войдетъ въ уравненія (10):  $\lambda \frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$ .

$3n$  уравненій (10) и уравненіе (1) послужатъ намъ для найхожденія  $(3n + 1)$  неизвѣстныхъ,  $3n$  координатъ и множителя  $\lambda$ .

Если система подчинена не одной, а  $k$  ( $k < 3n$ ) идеальнымъ связямъ

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n) &= 0, \\ f_2(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n) &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

тогда каждая идеальная связь оказывает на точки системы реакцию, проекции которых выражаются по формулам (9), причем множитель  $\lambda$  для различных связей имеет, вообще говоря, разные значения:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Поэтому дифференциальные уравнения движения точек несвободной системы в общем случае будут  $3n$  уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

где  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

$3n$  уравнений (12) вместе с  $k$  уравнениями (11) послужат нам для нахождения  $(3n + k)$  неизвестных:  $3n$  координат и  $k$  множителей  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ .

Общий метод для интегрирования уравнений (12) состоит в следующем: исключаем из уравнений (12) множители  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , в получении таким образом  $3n - k$  уравнений вместо  $k$  каких либо координат подставляем те их выражения через остальные  $3n - k$  координат, которые найдем из уравнений (11); таким образом получаем  $3n - k$  дифференциальных уравнений второго порядка с  $3n - k$  неизвестными координатами; для этих уравнений находим  $6n - 2k$  интегралов, которые будут содержать  $6n - 2k$  постоянных произ-

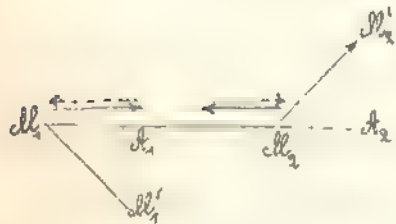
вольных; для определѣнія ихъ должны быть извѣстны начальныя положенія и начальныя скорости точекъ системы, т.-е. положенія и скорости точекъ въ некоторый моментъ  $t = t_0$ ; причѣмъ обыкновенно полагають  $t_0 = 0$ ; найдя изъ этихъ интеграловъ  $3n - k$  координатъ, какъ функцій отъ времени, остальные  $k$  координатъ найдемъ уже простой подстановкой въ имѣющіяся для нихъ выраженія.

Замѣтимъ, что, если система подчинена  $k$  связямъ, то мы можемъ задать произвольно для момента  $t_0$  только  $3n - k$  координатъ, остальные  $k$  координатъ найдутся изъ уравненій (11), отнесенныхъ къ моменту  $t_0$ ; также и для скоростей въ моментъ  $t_0$  можемъ задать произвольно только  $3n - k$  проекцій, а остальные  $k$  проекцій скоростей найдутся изъ  $k$  уравненій вида (2), выражающихъ условія для скоростей, — также отнесенныхъ къ моменту  $t_0$ .

Когда координаты точекъ системы будутъ найдены, какъ функцій времени, мы можемъ найти значенія множителей  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  съ помощью какихъ либо  $k$  уравненій изъ  $3n$  уравненій (12), подставивши въ нихъ вмѣсто координатъ извѣстныя функцій времени, а затѣмъ уже легко определѣить величину и направленіе реакцій каждой связи на каждую точку.

Какъ примѣръ идеальныхъ связей, рассмотримъ стержень, соединяющій двѣ точки  $M_1$  и  $M_2$ .

Реакціи стержня  $R_1$  и  $R_2$  равны и противоположны, а проекціи возможныхъ перемѣщеній  $M_1, M_1'$  и  $M_2, M_2'$  на направленіе стержня равны между собой (черт. 79):



Чертежъ 79.

$$M_1 A_1 = M_2 A_2 ;$$

поэтому, сумма работъ реакцій равна нулю:

$$R_1 \cdot \bar{M}_1 A_1 - R_2 \cdot \bar{A}_2 M_2 = 0.$$

Здѣсь  $R_1$  и  $R_2$  имѣютъ противоположные знаки.

Уравненіе связи:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0;$$

слѣдовательно, проекція реакцій выражаются формулами:

$$X^{(1)} = 2\lambda (x_1 - x_2),$$

$$Y^{(1)} = 2\lambda (y_1 - y_2),$$

$$Z^{(1)} = 2\lambda (z_1 - z_2);$$

$$X^{(2)} = -2\lambda (x_1 - x_2),$$

$$Y^{(2)} = -2\lambda (y_1 - y_2),$$

$$Z^{(2)} = -2\lambda (z_1 - z_2).$$

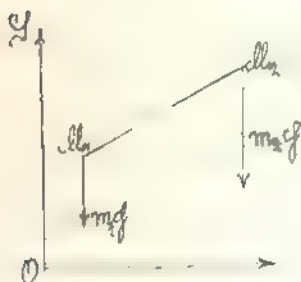
Такимъ образомъ, дифференціальныя уравненія движенія въ вертикальной плоскости *двухъ тяжелыхъ точекъ, связанныхъ стержнемъ*, если вертикальную плоскость, въ которой происходитъ движеніе, принять за плоскость  $XY$  и ось  $OY$  направить по вертикали вверхъ (черт. 80), будутъ:

$$m_1 \ddot{x}_1 = 2\lambda (x_1 - x_2),$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -m_1 g + 2\lambda (y_1 - y_2),$$

$$m_1 \ddot{z}_1 = 2\lambda (z_1 - z_2),$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g - 2\lambda (y_1 - y_2).$$



Свободное твердое тѣло мы рассмотримъ, какъ систему матеріальныхъ точекъ, соединенныхъ стержнями, слѣдо-

вательно, свободное твердое тѣло представляетъ систему, подчиненную идеальнымъ связямъ.

Замѣтимъ, что натянутая нить, связывающая двѣ матеріальныя точки, такъ же, какъ и стержень, представляетъ примѣръ

идеальної зв'язи.

Въ томъ случаѣ, когда всѣ кинематическія зв'язи или только нѣкоторые изъ нихъ не будуть идеальними, въ правій части дифференціальнихъ уравненій (12) ми должны ввести проєкції силъ тренія, соответствующихъ неидеальнимъ зв'язямъ.

### § 6. Уравненія равновѣсія системи матеріальнихъ точекъ.

Уравненія равновѣсія получаются изъ уравненій движенія, если положить ускоренія точекъ равными нулю. Такимъ образомъ, уравненія равновѣсія системи свободныхъ точекъ, на основаніи уравненій (A), будутъ  $3n$  уравненій:

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = 0 \quad \dots \dots \dots (13)$$

гдѣ  $i = 1, 2, 3, \dots n$ .

Изъ этихъ  $3n$  уравненій можемъ опредѣлить  $3n$  координатъ, опредѣляющихъ положеніе равновѣсія системи при данныхъ силахъ. Уравненія (12) могутъ имѣть не одну, а нѣсколько совокупностей вещественныхъ корней; каждой такой совокупности соответствуетъ положеніе равновѣсія системи; въ этомъ случаѣ система при дѣйствіи данныхъ силъ можетъ занимать любое изъ найденныхъ положеній.

Если система подчинена кинематическимъ связямъ, тогда уравненія равновѣсія ея, на основаніи уравненій (B), представляются, вообще говоря, въ видѣ

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = 0,$$

гдѣ  $i = 1, 2, 3, \dots n$ .

Если система подчинена  $k$  идеальнымъ связямъ, выражаемымъ уравненіями (11), то уравненія равновѣсія ея, на основаніи уравненій (12), будутъ имѣть видъ:



$$\begin{aligned} X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i}, \\ Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i}, \\ Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}. \end{aligned}$$

гдѣ  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Изъ этихъ  $3n$  уравненій и  $k$  уравненій связей, при данныхъ силахъ мы можемъ найти  $3n + k$  ненавѣстныхъ:  $3n$  координатъ точекъ системы въ положеніи равновѣсія и  $k$  множителей:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k$ ; зная величины этихъ множителей, легко уже опредѣлить реакціи, которыя оказываютъ связи на точки системы въ положеніи равновѣсія.

## ГЛАВА IV.

### НАЧАЛО ВОЗМОЖНЫХЪ ПЕРЕМѢЩЕНІЙ И НАЧАЛО ДАЛАНБЕРА.

#### § 1. Начало возможныхъ перемѣщеній для случая равновѣсія.

Возможнымъ перемѣщеніемъ или виртуальнымъ отклоненіемъ одной точки или системы точекъ мы называли въ предыдущей главѣ (въ § 3) такое безконечно малое перемѣщеніе, которое не нарушаетъ данныхъ связей, если не принимать во вниманіе нарушеній безконечно малыхъ второго и высшихъ порядковъ.

Воспользуемся этимъ понятіемъ прежде всего для того, чтобы всѣ уравненія равновѣсія въ каждомъ случаѣ замѣнить одними

равносильный имъ уравненіямъ.

Разсмотримъ сначала случай одной матеріальной точки.

Уравненія равновѣсія свободной матеріальной точки представляются въ видѣ:

$$X=0, Y=0, Z=0 \dots \dots \dots (1)$$

Уравненія равновѣсія точки, находящейся на поверхности

$$f(x, y, z) = 0.$$

будутъ:

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ  $\lambda = \frac{Q}{\Delta f}$

Уравненія равновѣсія точки, находящейся на кривой

$$\left. \begin{aligned} f_1(x, y, z) &= 0, \\ f_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \right.$$

будутъ:

$$\left. \begin{aligned} X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0, \\ Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0, \\ Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

гдѣ  $\lambda_1 = \frac{Q_1}{\Delta f_1}$  и  $\lambda_2 = \frac{Q_2}{\Delta f_2}$ .

Въ уравненіяхъ (1), (2) и (3) черезъ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  обозначены проекціи равнодѣйствующей задаваемыхъ силъ, включая въ число ихъ и силу тренія, если она существуетъ,  $R$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  — реакціи соотвѣствующихъ поверхностей.

Будем обозначать возможное перемещение точки, какъ и въ главѣ III, § 3, черезъ  $\delta s$ , его проекціи на координатныя оси черезъ  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ .

Мы знаемъ, что въ случаѣ свободной матеріальной точки всѣ эти проекціи произвольны, когда точка находится на поверхности, возможное перемещение  $\delta s$  лежитъ въ касательной плоскости, и проекціи его удовлетворяютъ уравненію

$$\frac{\partial l}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial l}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial l}{\partial z} \cdot \delta z = 0; \dots \dots \dots (4)$$

когда же точка находится на кривой, то возможное перемещение направлено по касательной къ кривой, и проекціи его удовлетворяютъ уравненіямъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial l}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial l}{\partial z} \cdot \delta z &= 0, \\ \frac{\partial l}{\partial x} \cdot \delta x + \frac{\partial l}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial l}{\partial z} \cdot \delta z &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

Умножимъ уравненія равновѣсія точки каждой изъ системъ (1), (2) и (3): первое на  $\delta x$ , второе на  $\delta y$ , третье на  $\delta z$  и сложимъ, тогда мы получимъ какъ для точки свободной, такъ и для точки несвободной въ силу уравненія (4) и уравненій (5), одно и то же уравненіе:

$$X \delta x + Y \delta y + Z \delta z = 0 \dots \dots \dots (6)$$

Извѣстно, что трехчленъ, стоящій въ лѣвой части уравненія (6), равенъ произведенію:

$$F \cdot \delta s \cdot \cos(F, \delta s)$$

и выражаетъ работу равнодѣйствующей данныхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на бесконечно маломъ перемещеніи ея изъ положенія равновѣсія.

Уравненіе (6) выражаетъ начало возможныхъ перемещеній изъ положенія равновѣсія для одной точки

Работа равнодѣйствующей данныхъ силъ (включая и силу тренія), приложенныхъ къ точки, на всякомъ возможномъ перемѣщеніи точки изъ положенія равновѣсія равна нулю.

Уравненіе (6) мы получили изъ уравненій равновѣсія, но можно, обратно, изъ уравненій (6) получить уравненія равновѣсія [съ помощью уравненій (4) и (5)].

Въ случаѣ свободной точки проекціи возможнаго перемѣщенія  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  произвольны; положимъ:  $\delta x$  не равно нулю, а  $\delta y = \delta z = 0$ , тогда изъ уравненій (6) слѣдуетъ:

$$X = 0;$$

положимъ:  $\delta y$  не нуль, а  $\delta x = \delta z = 0$ , получаемъ:

$$Y = 0;$$

наконецъ, полагая:  $\delta z$  не нуль, а  $\delta x = \delta y = 0$ , находимъ:

$$Z = 0;$$

такимъ образомъ, изъ уравненій (6) вытекаютъ, какъ необходимое слѣдствіе, три уравненія (1) равновѣсія свободной точки:

$$X = 0, Y = 0, Z = 0.$$

Въ томъ случаѣ, когда точка находится на поверхности, удовлетворяющая уравненію (4) на неопредѣленный пока множитель  $\lambda$  и связанная съ уравненіемъ (6), получимъ:

$$(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}) \delta x + (Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}) \delta y + (Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}) \delta z = 0 \quad (*)$$

Въ силу уравненія (4) одна изъ проекцій  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  выражается черезъ двѣ остальные, наприимръ,  $\delta z$  черезъ  $\delta x$  и  $\delta y$ , которыя останутся произвольными, дадимъ  $\lambda$  такое значеніе, чтобы множитель при  $\delta z$  въ уравненіи (\*) былъ равенъ нулю:

$$Z + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

Полагая затѣмъ:  $\delta x$  не нуль, а  $\delta y = 0$ , получаемъ:

$$X + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} = 0;$$

наконецъ, полагая  $\delta y$  не нуль, находимъ:

$$Y + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Мы получимъ, такимъ образомъ, уравненія (2), какъ необходимое слѣдствіе уравненій (6) и (4).

Если точка находится на кривой, умножаемъ первое изъ уравненій (5) на  $\lambda_1$ , второе на  $\lambda_2$ , причемъ  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  величины пока неопредѣленныя, складываемъ съ уравненіями (8), получаемъ:

$$(X + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x}) \delta x + (Y + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y}) \delta y + (Z + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial z}) \delta z = 0 \quad (**)$$

Въ силу уравненій (5) двѣ изъ проекцій  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  выражаются черезъ третью, напримѣръ,  $\delta y$  и  $\delta z$  черезъ  $\delta x$ , которая остается произвольною; дадимъ  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  такія значенія, чтобы множители при  $\delta y$  и  $\delta z$  въ уравненіи (\*\*) равнялись нулю

$$Y + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$Z + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

тогда и множитель при  $\delta x$  долженъ равняться нулю:

$$X + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Мы получимъ изъ уравненій (6) и уравненій (5) уравненія (8).

Изъ всего сказаннаго можемъ сдѣлать слѣдующее заключеніе: уравненіе (6) равносильно каждой изъ системъ (1), (2) и (3) уравненій равновѣсія матеріальной точки. Оно выражаетъ *необходимое и достаточное* условіе равновѣсія точки, если принять во вниманіе: произвольность проекцій *возможнаго* перемѣщенія въ случай свободной точки, уравненіе (4), - когда точка находится на поверхности, и уравненія (5) - когда точка находится на кривой.

Перейдемъ къ *системѣ* матеріальныхъ точекъ.

Въ § 5 главы III были введены уравненія равновѣсія, какъ въ случай системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ:

$$X_i = 0, \quad Y_i = 0, \quad Z_i = 0 \quad (7)$$

( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), такъ и въ случай системы *нессвободныхъ* матеріальныхъ точекъ, подчиненной  $k$  ( $k < 3n$ ) *идеальнымъ* связямъ:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2 &= 0, \dots, \dots, f_k &= 0; \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} &= 0, \\ Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} &= 0, \\ Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

гдѣ  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Если связи не идеальныя, то проекціи силъ тренія должны быть включены въ первые члены этихъ уравненій.

Знаемъ, что въ случай системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ проекціи возможныхъ перемѣщеній точекъ системы  $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta x_3, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$  произвольны, а въ случай



системы несвободных материальных точек, подчиненной  $k$  внешним связям, проекции эти должны удовлетворять  $k$  уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) &= 0, \\ \dots \dots \dots &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial z_i} \delta z_i \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

Умножив уравнения равновесія системы, именнно уравнения (7), когда система свободна, уравнения (8), когда система несвободна, соответственно на  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$ , складываемъ ихъ для всѣхъ значеній  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ; принимая при этомъ во вниманіе, въ случай несвободной системы, уравнения (9), получаемъ какъ для свободной, такъ и для несвободной системы одно и то же уравненіе:

$$X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1 + X_2 \delta x_2 + Y_2 \delta y_2 + Z_2 \delta z_2 + \dots + Z_n \delta z_n = 0$$

или короче:

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0 \dots \dots (10)$$

Уравненіе (10) выражаетъ начало возможныхъ перемещеній изъ положенія равновесія системы материальныхъ точекъ:

Сумма работъ данныхъ силъ (и силъ тренія), приложенныхъ къ точкамъ системы, на всякихъ возможныхъ перемещеніяхъ системы изъ положенія равновесія равна нулю.

Уравненіе (10) мы вывели изъ уравненій равновѣсія. Обратно, принимая во вниманіе произвольность проекцій возможныхъ перемещеній въ случай системы свободныхъ точекъ, мы выведемъ уравненіе равновѣсія (7) изъ уравненія (10), а въ случай системы несвободныхъ точекъ, примѣняя способъ неопредѣленныхъ множе-



Возьмемъ элементъ длины  $ds$  части нити  $BC$ . Работа его вѣса на возможномъ перемѣщеніи будетъ:

$$k \cdot ds \cdot g \cdot \delta (-\sin \beta),$$

а для всей части

$$-\delta k g \sin \beta \sum ds = -\delta k g \sin \beta \bar{BC}$$

Такимъ образомъ, вся работа вѣса нити на возможномъ перемѣщеніи ея  $\delta$  будетъ:

$$\delta k g (\bar{AB} \sin \alpha - \bar{BC} \sin \beta)$$

Для равновѣсія нити необходимо:

$$\delta k g (\bar{AB} \sin \alpha - \bar{BC} \sin \beta) = 0.$$

Такъ какъ  $\delta$ ,  $k$  и  $g$  не нули, то для равновѣсія необходимо, чтобы:

$$\bar{AB} \sin \alpha = \bar{BC} \sin \beta$$

Это условіе выражаетъ, что концы нити  $A$  и  $C$  должны лежать на одной горизонтальной прямой.

## § 2. Начало Д'Аламбера \*).

Начало Д'Аламбера позволяетъ всякій вопросъ о движеніи свести къ вопросу о равновѣсіи.

Д'Аламберъ ввелъ новое понятіе о силѣ инерціи.

Силою инерціи для данной матеріальной точки называютъ силу, которая по величинѣ равна произведенію массы на ускореніе точки и направлена въ сторону, противоположную этому ускоренію \*\*).

\*) D'Alembert, "Traité de Dynamique" 1743.

\*\*) Запишемъ, что сила, равная и прямо противоположная силѣ инерціи, называется движущею силою.

Такимъ образомъ, проекціи силы инерціи на координатныя оси или ея составляющія по координатнымъ осямъ \*) будутъ:

$$-m\ddot{x}, \quad -m\ddot{y}, \quad -m\ddot{z}$$

Извѣстныя намъ дифференціальныя уравненія движенія точки можно представить въ такомъ видѣ: если точка свободна:

$$\left. \begin{aligned} X - m\ddot{x} &= 0, \\ Y - m\ddot{y} &= 0, \\ Z - m\ddot{z} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Если точка остается на данной поверхности  $f(x, y, z) = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} X - m\ddot{x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ Y - m\ddot{y} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ Z - m\ddot{z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Если точка находится на данной кривой  $f_1(x, y, z) = 0$ ,  
 $f_2(x, y, z) = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} X - m\ddot{x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0, \\ Y - m\ddot{y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0, \\ Z - m\ddot{z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

---

\*) Сила инерціи можетъ быть разложена также на две части взаимно перпендикулярныя составляющія, изъ которыхъ одна — касательная къ траекторіи точки въ сторону произвольной скорости; другая — нормальная къ траекторіи въ сторону ея выпуклости эта скорость составляющая, очевидно, есть центробѣжная сила.

Въ лѣвыхъ частяхъ уравненій (11), (12) и (13) мы имѣемъ суммъ проекцій: заданной силы, или равнодѣйствующей заданныхъ силъ, силы инерціи и, въ случаѣ несвободной точки, реакцій.

Назовемъ равнодѣйствующую заданной силы (или задаваемыхъ силъ) и силы инерціи *потерянною силою* и обозначимъ буквою  $P$  (черт. 82). Очевидно, проекція потерянной силы на координатныя оси будутъ:

$$P_x = X - m \cdot x'',$$

$$P_y = Y - m \cdot y'',$$

$$P_z = Z - m \cdot z''.$$



Такимъ образомъ, уравненія движенія (11), (12) и (13) могутъ быть написаны въ видѣ:

$$P_x = 0, P_y = 0, P_z = 0 \quad \dots (11)$$

Чертежъ 82.

$$\left. \begin{aligned} P_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} &= 0, \\ P_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} &= 0, \\ P_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} P_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0, \\ P_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 0, \\ P_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

Сравнивая уравненія (11), (12) и (13) съ уравненіями равновѣсія (1), (2) и (3), замѣчаемъ, что первая отличается отъ послѣднихъ только тѣмъ, что въ нихъ входитъ, вмѣсто на-

даваемой силы, сила потерянная.

Такимъ образомъ, уравненія (11), (12) и (13) въ каждый моментъ могутъ быть рассматриваемы, какъ уравненія равновѣсія потерянной силы.

Они выражаютъ начало д'Аламбера въ случаѣ одной точки:

При движеніи матеріальной точки въ каждый моментъ времени потерянная сила или равна нулю, если точка свободна, или уравновѣшивается реакціей поверхности или кривой, если точка не-свободна.

Распространимъ это начало на случай системы матеріальныхъ точекъ.

Дифференціальныя уравненія движенія системы точекъ могутъ быть написаны въ видѣ 3 уравненій:

$$\left. \begin{aligned} X_i - m_i x_i'' &= 0, \\ Y_i - m_i y_i'' &= 0, \\ Z_i - m_i z_i'' &= 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

(гдѣ  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), если система свободна, и въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} X_i - m_i x_i'' + \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i} &= 0, \\ Y_i - m_i y_i'' + \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i} &= 0, \\ Z_i - m_i z_i'' + \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ), если система подчинена  $k$  ( $k < 3n$ ) связямъ:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n) &= 0, \\ f_2 &= 0, \dots \dots \dots f_k = 0; \end{aligned} \right\}$$

когда эти связи не идеальны, проекція силъ тренія должны быть включены въ первые члены уравненій (15).



Потерянную силу въ точкѣ  $M_i$  обозначимъ черезъ  $\mathcal{P}_i$ , проекціи ея, очевидно, будутъ:

$$\mathcal{P}_{ix} = X_i - m_i x_i',$$

$$\mathcal{P}_{iy} = Y_i - m_i y_i',$$

$$\mathcal{P}_{iz} = Z_i - m_i z_i'.$$

3 n уравненій (14) и (15) могутъ быть тогда написаны въ видѣ:

$$\mathcal{P}_{ix} = 0, \quad \mathcal{P}_{iy} = 0, \quad \mathcal{P}_{iz} = 0 \quad (14_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{P}_{ix} + \lambda_1 \frac{\partial l_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial l_k}{\partial x_i} &= 0, \\ \mathcal{P}_{iy} + \lambda_1 \frac{\partial l_1}{\partial y_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial l_k}{\partial y_i} &= 0, \\ \mathcal{P}_{iz} + \lambda_1 \frac{\partial l_1}{\partial z_i} + \dots + \lambda_k \frac{\partial l_k}{\partial z_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15_1)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Уравненія (14<sub>1</sub>) и (15<sub>1</sub>) могутъ быть рассматриваемы какъ уравненія равновесія потерянныхъ силъ.

Они выражаютъ начало д'Аламбера въ случаѣ системы материальныхъ точекъ:

При движеніи системы материальныхъ точекъ въ каждый моментъ времени потерянные силы для всѣхъ точекъ системы равны нулю, если система свободна, и уравновѣшиваются черезъ посредство реакцій связей, если система не свободна.

### § 3. Начало возможныхъ перемещеній для случая движенія.

Принимая начало возможныхъ перемещеній къ потеряннымъ силамъ мы получимъ начало возможныхъ перемещеній для случая

движенія.

Такъ при движеніи точки работа потерянной силы на возможномъ перемѣщеніи точки изъ положенія, которое она занимаетъ въ какой-либо моментъ времени, будетъ равна нулю, какъ въ случаѣ свободной, такъ и въ случаѣ несвободной точки; — получаемъ:

$$\mathcal{P}_x \delta x + \mathcal{P}_y \delta y + \mathcal{P}_z \delta z = 0.$$

или

$$(X - m x'') \cdot \delta x + (Y - m y'') \cdot \delta y + (Z - m z'') \cdot \delta z = 0. \quad (16)$$

Уравненіе (16) выражаетъ "начало возможныхъ перемещеній для движенія точки".

На основаніи изложеннаго въ § 1 ясно, что уравненіе (16) равносильно уравненіямъ (11), (12) и (13).

Также при движеніи системы въ каждый моментъ времени сумма работъ потерянныхъ силъ на всякихъ возможныхъ перемѣщеніяхъ точекъ системы изъ положеній, занимаемыхъ ими въ этотъ моментъ, будетъ равна нулю; — получаемъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (\mathcal{P}_{x_i} \delta x_i + \mathcal{P}_{y_i} \delta y_i + \mathcal{P}_{z_i} \delta z_i) = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{i=n} \{ (X_i - m_i x_i'') \delta x_i + (Y_i - m_i y_i'') \delta y_i + (Z_i - m_i z_i'') \delta z_i \} = 0 \quad (17)$$

Уравненіе (17) выражаетъ "начало возможныхъ перемещеній для движенія системы".

На основаніи изложеннаго въ § 1 ясно, что уравненіе (17) равносильно 3n дифференціальнымъ уравненіямъ движенія системы (14) и (15)

Уравненіе (17) можетъ быть разсматриваемо, какъ основное уравненіе всей механики, ибо изъ него могутъ быть получены уравненія равновѣсія и движенія, какъ въ случаѣ одной точки такъ и въ случаѣ системы точекъ, а, слѣдовательно, и различ-

ныя свойства равновѣсія и движенія, которыя изъ этихъ уравненій выводятся.

*Примѣръ.* Въ случаѣ движенія тяжелой нити по двумъ наклоннымъ прямымъ (см. примѣръ параграфа 1), если длину  $AB$  (черт. 81), обозначимъ черезъ  $x$ , уравненіе, выражающее начало возможныхъ перемѣненій, будетъ:

$$[k \cdot x \cdot g \sin \alpha - k(l-x)g \sin \beta - k^2 l \frac{d^2 x}{dt^2}] \delta = 0 ;$$

отсюда слѣдуетъ дифференціальное уравненіе движенія нити:

$$x'' = \frac{g}{l} (\sin \alpha + \sin \beta) x - g \sin \beta .$$

Обозначимъ для сокращенія письма:

$$\frac{g}{l} (\sin \alpha + \sin \beta) = n^2 ;$$

тогда уравненіе движенія будетъ:

$$x'' = n^2 x - g \sin \beta .$$

Интегрируя это уравненіе, находимъ:

$$x = \frac{g \sin \beta}{n^2} + C e^{nt} + D e^{-nt} ,$$

гдѣ  $C$  и  $D$  постоянныя произвольныя.

Такъ какъ имѣемъ:

$$x' = n (C e^{nt} - D e^{-nt}) ,$$

то для  $C$  и  $D$  получаемъ слѣдующія выраженія черезъ начальныя данныя:

$$C = \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{g \sin \beta}{n^2} + \frac{x_0'}{n} \right) ,$$

$$D = \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{g \sin \beta}{n^2} - \frac{x_0'}{n} \right) .$$

Разсмотримъ подробнѣе, наприимѣръ, тотъ случай, когда въ

начальный моментъ нить движется влѣво (черт. 79), т.е. когда

$$x_0 > 0$$

Тогда  $C > D$ ; если при этомъ будетъ  $C > 0$ , то скорость нити не обращается въ нуль: вся нить переходитъ на лѣвую прямую  $BM$  и далѣе движется равноускоренно; если же будетъ  $C < 0$ , то нить сначала движется влѣво, въ некоторый моментъ скорость ея обращается въ нуль, затѣмъ вся нить переходитъ на правую прямую  $BN$  и далѣе движется равноускоренно.

----- и -----

*примечаніе.* При изученіи изложенныхъ здѣсь началъ и слѣдующихъ далѣе законовъ важно все время имѣть въ виду, что они имѣютъ мѣсто не только для отдѣльныхъ матеріальныхъ точекъ, но для всякаго тѣла: твердаго, жидкаго и газообразнаго, а также и для всякой совокупности указанныхъ тѣлъ; - въ этихъ случаяхъ каждый элементъ тѣла замѣняется матеріальной точкой, масса которой равна массѣ элемента, а поэтому число точекъ системы безконечно велико ( $n = \infty$ ) и масса каждой точки безконечно мала.

Вмѣсто декартовыхъ координатъ:  $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n$  часто употребляются другія переменныя величины, опредѣляющія положеніе системы.

## ГЛАВА V.

### ЗАКОНЪ ДВИЖЕНІЯ ЦЕНТРА ИНЕРЦІИ

(или "законъ движенія центра тяжести").

#### § 1. Общій законъ движенія центра инерціи.

Центромъ инерціи системы матеріальныхъ точекъ называется геометрическая точка, координаты которой  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$ , выражаются слѣдующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i}{\mathcal{M}}, \\ y_c &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i}{\mathcal{M}}, \\ z_c &= \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i}{\mathcal{M}}, \end{aligned} \right\} \dots \quad (1)$$

гдѣ  $\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i$  есть "масса системы", равная суммѣ массъ всѣхъ точекъ системы.

Такой же видъ имѣютъ формулы для координатъ центра тяжести, если подставить въ нихъ вмѣсто вѣса  $\rho_i$ , равное ему произведеніе  $m_i g$  и оократить на  $g$ ; отсюда слѣдуетъ, что геометрическая точка, которую мы назвали центромъ инерціи системы, совпадаетъ съ центромъ тяжести той же системы, когда на точки ея дѣйствуютъ силы тяжести \*).

---

\*) Вслѣдствіе этого "центра инерціи" называютъ часто "цент-

Возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія системи въ  
самомъ общемъ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= X_i, \\ m_i \ddot{y}_i &= Y_i, \\ m_i \ddot{z}_i &= Z_i. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

гдѣ  $i = 1, 2, 3, \dots$

Здѣсь курсивныя буквы:  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  обозначаютъ про-  
екціи равнодѣйствующихъ *всѣхъ* силъ, приложенныхъ къ точкѣ  $M_i$   
- какъ силъ *задаваемыхъ*, такъ и тѣхъ силъ (реакцій и силъ  
тренія), которыя являются *вслѣдствіе* существованія связей, по-  
этому, если система точекъ свободна, то:

$$X_i = X_i,$$

$$Y_i = Y_i,$$

$$Z_i = Z_i;$$

если же система несвободна, но подчинена только связямъ *иде-*  
*альнымъ*:

то:  $f_1 = 0, f_2 = 0, \dots \dots \dots f_k = 0,$

$$X_i = X_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_i},$$

$$Y_i = Y_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_i} + \dots \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial y_i},$$

$$Z_i = Z_i + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z_i} + \dots \dots + \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial z_i}.$$

Складывая порознь всѣ дифференціальныя уравненія, содержа-  
щія проекціи на координатныя оси  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ , получимъ  
три уравненія:

.....  
тремя *тяжести*", но мы удѣлимъ *первый терминъ*, такъ какъ въ  
механикѣ рассматриваются и такія системы *матеріальныхъ точекъ*,  
на которыя *оплы тяжести не дѣйствуютъ*.



$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{G}_i, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{G}_i^y, \\ \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{G}_i^z. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Изъ уравненій (1) находимъ:

$$\begin{aligned} M \cdot x_c &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i \\ M \cdot y_c &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i \\ M \cdot z_c &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i \end{aligned}$$

откуда:

$$\left. \begin{aligned} M \cdot x_c' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i', \\ M \cdot y_c' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i', \\ M \cdot z_c' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i'. \end{aligned} \right\} \quad *) \quad (**)$$

и далѣе:

$$\left. \begin{aligned} M \cdot x_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'', \\ M \cdot y_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'', \\ M \cdot z_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} m_i z_i''. \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (***)$$

---

\*) Эти формулы выражаютъ, что количество движенія центра инерціи въ предположеніи, что онъ имѣетъ массу, равную массѣ системы, равно по величинѣ и по направленію геометрической суммъ количествъ движенія всѣхъ точекъ системы.

Сравнивая формулы (\*) и (\*\*\*) получимъ:

$$\left. \begin{aligned} M x_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{G}_1, \\ M y_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{G}_2, \\ M z_c'' &= \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{G}_3. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Уравненія (3) можемъ рассматривать какъ дифференціальныя уравненія движенія свободной матеріальной точки, координаты которой суть  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  и масса  $M$ , при дѣйствіи силъ, которая равна по величинѣ и направленію геометрической суммѣ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на точки системы.

Уравненія (3) выражаютъ общій законъ движенія центра инерціи:

При движеніи системы центръ инерціи (центръ тяжести) ея движется, какъ свободная матеріальная точка, масса которой равна массѣ системы, при дѣйствіи силы, равной по величинѣ и направленію геометрической суммѣ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на точки системы.

Силы, приложенныя къ точкамъ системы, мы дѣлили на двѣ группы: силы задаваемыя и реакціи (въ числѣ ихъ и силы тренія), но во многихъ вопросахъ удобно другое раздѣленіе, а именно на силы внутреннія и силы внѣшнія.

Внутреннія силы суть силы, удовлетворяющія тому условію, что каждой изъ нихъ соответствуетъ другая сила, приложенная къ другой точкѣ системы, равная первой по величинѣ и направленная по той же прямой въ противоположную сторону; всѣ другія силы, приложенныя къ точкамъ системы, суть силы внѣшнія. Реакціи связей могутъ входить какъ въ число внутреннихъ, такъ и

въ число вѣшнихъ силъ.

Примѣры внутреннихъ силъ. силы взаимодействій (притяженія или отталкиванія) между точками системы, реакціи стержня или натянутой нити на тѣ двѣ точки, которыя стержень или нить соединяетъ, и др.

Примѣры вѣшнихъ силъ. силы тяжести, силы притяженія къ вѣшнымъ центрамъ, реакціи поверхностей и др.

Обозначимъ проекціи равнодѣйствующей всѣхъ внутреннихъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots n$ ), черезъ  $X_i^3$ ,  $Y_i^3$ ,  $Z_i^3$ , а проекціи равнодѣйствующей всѣхъ вѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ той же точкѣ  $M_i$ , черезъ  $X_i^e$ ,  $Y_i^e$ ,  $Z_i^e$ , тогда можемъ написать:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{G}_i &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i^3 + \sum_{i=1}^{i=n} X_i^e, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{Q}_i &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^3 + \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^e, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{Z}_i &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^3 + \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^e.\end{aligned}$$

Внутреннія силы попарно равны и направлены прямо противоположно, поэтому сумма ихъ проекцій на всякую ось равна нулю, слѣдовательно,

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i^3 = \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^3 = \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^3 = 0,$$

и мы получаемъ:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{G}_i &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i^e, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{Q}_i &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^e, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \mathcal{Z}_i &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^e.\end{aligned}$$

Такимъ образомъ, уравненія (3) принимаютъ видъ:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_c &= \sum_{i=1}^{i=n} X_i^x, \\ M \ddot{y}_c &= \sum_{i=1}^{i=n} Y_i^y, \\ M \ddot{z}_c &= \sum_{i=1}^{i=n} Z_i^z. \end{aligned} \right\} \dots \quad (4)$$

Уравненія (4) позволяют выразить законъ движенія центра инерціи въ слѣдующей формѣ:

При движеніи системы центръ инерціи (центръ тяжести) ея движется такъ, какъ свободная матеріальная точка, масса которой равна массѣ системы, при дѣйствіи силы, равной по величинѣ и направленію геометрической суммѣ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы.

Твердое тѣло мы разсматриваемъ, какъ систему матеріальныхъ точекъ, связанныхъ стержнями; но реакціи стержней — силы внутреннія, слѣдовательно, центръ тяжести твердаго тѣла движется такъ, какъ свободная матеріальная точка, масса которой равна массѣ тѣла, при дѣйствіи силъ, равной геометрической суммѣ однихъ внѣшнихъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу. Напримѣръ, если твердое тѣло, при отсутствіи какихъ-либо опоръ, движется при дѣйствіи силы тяжести, причемъ сопротивленіе воздуха не принимается во вниманіе, то центръ тяжести тѣла описываетъ параболу по тому же закону, какъ свободная тяжелая точка, движущаяся въ пустотѣ.

Изъ уравненій (4) слѣдуетъ, что движеніе центра инерціи системы не измѣняется, если въ системѣ исчезаютъ внутреннія силы или возникаютъ новыя внутреннія силы.

Исчезновеніе внутреннихъ силъ имѣетъ мѣсто, напримѣръ, при взрывѣ твердаго тѣла, такъ какъ при этомъ исчезаютъ реакціи нѣкоторыхъ стержней: появленіе новыхъ внутреннихъ силъ имѣетъ мѣсто при соудареніи тѣлъ, образующихъ систему

Оти́тъмъ здѣсь, между прочимъ, какъ слѣдствіе уравненій (4), что человѣкъ, стоящій на совершенно гладкой горизонтальной плоскости, не можетъ ходить по ней, такъ какъ единственныя вѣйствія силы, — сила тяжести и реакціи плоскости вертикальны, слѣдовательно, могутъ сообщить центру тяжести человѣка скорость только въ вертикальномъ направленіи.

Съ помощью закона движенія центра инерціи объясняется, напримеръ, откатъ орудія при выстрѣлѣ.

Во многихъ задачахъ, интегрируя уравненія (4), мы можемъ получить нѣкоторые интегралы дифференціальныя уравненія движенія системы.

## § 2. Законъ сохраненія движенія центра инерціи.

Законъ движенія центра инерціи представляется въ самомъ простомъ видѣ въ томъ частномъ случаѣ, когда вѣйствія силы или не приложены къ точкамъ системы, или имѣютъ геометрическую сумму, равную нулю.

Въ этомъ случаѣ:

$$\sum X_i^e = 0,$$

$$\sum Y_i^e = 0,$$

$$\sum Z_i^e = 0, \quad *)$$

и слѣдовательно:

---

\*) Здѣсь и въ слѣдующихъ параграфахъ знакъ  $\sum$  и тогда, когда не написано  $i$ , обозначаетъ сумму, распространенную на все значенія индексовъ отъ 1 до  $n$ , то есть число точекъ системы.

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_c &= 0, \\ M \ddot{y}_c &= 0, \\ M \ddot{z}_c &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4_1)$$

Ускореніе центра инерціи равно нулю, значить скорость его постоянна по величинѣ и направленію, т.е. центр инерціи движется прямолинейно и равномерно.

Изъ уравненій (4<sub>1</sub>) имѣемъ:

$$\dot{x}_c = \alpha, \quad \dot{y}_c = \beta, \quad \dot{z}_c = \gamma.$$

и

$$\begin{aligned} x_c &= \alpha t + a, \\ y_c &= \beta t + b, \\ z_c &= \gamma t + c. \end{aligned}$$

гдѣ  $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$  - постоянныя произвольныя, въ частныхъ случаяхъ всѣ или нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть равны нулю.

Въ рассматриваемомъ случаѣ мы имѣемъ законъ сохранения движенія центра инерціи:

Если къ системѣ не приложены внѣшнія силы, или если геометрическая сумма внѣшнихъ силъ равна нулю, то центр инерціи системы движется прямолинейно и равномерно или остается въ покое.

Законъ сохранения движенія центра инерціи имѣетъ, напримеръ, мѣсто для свободной системы, подверженной дѣйствію только внутреннихъ силъ. Примеръ такой системы представляетъ солнечная система, центр инерціи которой движется прямолинейно и равномерно.

Законъ сохранения движенія центра инерціи даетъ шесть интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія системы:



$$\sum m_i x_i' = C_1,$$

$$\sum m_i y_i' = C_2,$$

$$\sum m_i z_i' = C_3;$$

$$\sum m_i x_i = C_1 t + D_1,$$

$$\sum m_i y_i = C_2 t + D_2,$$

$$\sum m_i z_i = C_3 t + D_3.$$

Значенія постійнихъ произвольныхъ  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  мы найдемъ, подставляя въ первыя три уравненія вмѣсто  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  проекціи начальныхъ скоростей точекъ системы, а затѣмъ найдемъ и значенія постоянныхъ произвольныхъ:  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ , подставляя во вторыя три уравненія вмѣсто  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  координаты начальныхъ положеній точекъ системы и полагая:

$$t = t_0,$$

обыкновенно полагають,

$$t_0 = 0$$

Вышеуказанныя постоянныя  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  связаны весьма просто съ постоянными  $C$  и  $D$ :

$$\alpha = \frac{C_1}{M}, \quad \beta = \frac{C_2}{M}, \quad \gamma = \frac{C_3}{M},$$

$$a = \frac{D_1}{M}, \quad b = \frac{D_2}{M}, \quad c = \frac{D_3}{M}.$$

## ГЛАВА VI.

### ЗАКОНЪ МОМЕНТОВЪ ИЛИ ЗАКОНЪ ПЛОЩАДИ

#### § 1. Главный моментъ количества движения точекъ системы и главный моментъ силъ.

Геометрическая сумма моментовъ количества движения точекъ системы относительно точки или относительно оси называется **главнымъ моментомъ количества движения точекъ системы** относительно точки или относительно оси.



Чертежъ 33.

$l_x$ ; будемъ имѣть:

$$l_x = \sum m_i (y_i x_i' - x_i y_i'),$$

$$l_y = \sum m_i (x_i x_i' - x_i x_i'),$$

Обозначимъ главный моментъ количества движения относительно начала координатъ черезъ  $l$ , проекціи его на координатныя оси, или, что то же самое\*), главныя моменты количества движения относительно осей черезъ  $l_x$ ,  $l_y$ ,

\*) См. "Кинематика точек".

$$l_i = \sum m_i (x_i y_i - y_i x_i).$$

Обозначим через  $\sigma_{ji}^{(1)}$ ,  $\sigma_{ix}^{(1)}$ ,  $\sigma_{iy}^{(1)}$ , секторіальныя скорости точки  $M_i$  въ плоскостяхъ соответственно  $YOZ$ ,  $ZOX$ ,  $XOY$ ; тогда:

$$l_x = 2 \sum m_i \sigma_{ji}^{(1)},$$

$$l_y = 2 \sum m_i \sigma_{ix}^{(1)},$$

$$l_z = 2 \sum m_i \sigma_{iy}^{(1)}.$$

Геометрическая сумма моментовъ силъ относительно точки или относительно оси называется *главнымъ моментомъ силъ* относительно точки, или относительно оси.

Обозначая главный моментъ всѣхъ силъ (заданныхъ и реакцій), приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно начала координатъ черезъ  $L$ , а проекціи его на оси, или, что то же самое, главные моменты всѣхъ силъ относительно осей, черезъ  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  будемъ имѣть:

$$L_x = \sum (y_i Z_i - z_i Y_i),$$

$$L_y = \sum (z_i X_i - x_i Z_i),$$

$$L_z = \sum (x_i Y_i - y_i X_i).$$

## § 2. Законъ площадей или законъ моментовъ.

Чтобы вывести связь между главнымъ моментомъ количества движенія и главнымъ моментомъ силъ, воспользуемся дифференціальными уравненіями движенія системы:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \dot{x}_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}, \\ m_2 \dot{y}_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1}, \\ m_1 \dot{z}_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_1}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

гдѣ  $\nu = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Множимъ второе изъ уравненій (1) на  $\dot{x}_1$ , третье на  $\dot{y}_1$ , и вычитаемъ первое произведеніе изъ второго, получаемъ.

но 
$$m_1 (\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1) = \dot{y}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \dot{x}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1},$$

$$\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1 = \frac{d}{dt} (\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1),$$

слѣдовательно:

$$\frac{d}{dt} m_1 (\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1) = \dot{y}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \dot{x}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_1}.$$

Такія равенства могутъ быть написаны для всѣхъ точекъ системы ( $\nu = 1, 2, 3, \dots, n$ ), складывая ихъ, получимъ:

$$\frac{d}{dt} \sum m_\nu (\dot{y}_\nu \dot{x}_\nu - \dot{x}_\nu \dot{y}_\nu) = \sum (\dot{y}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\nu} - \dot{x}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_\nu});$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$\frac{d}{dt} \sum m_\nu (\dot{x}_\nu \dot{z}_\nu - \dot{z}_\nu \dot{x}_\nu) = \sum (\dot{x}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_\nu} - \dot{z}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\nu}),$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_\nu (\dot{z}_\nu \dot{y}_\nu - \dot{y}_\nu \dot{z}_\nu) = \sum (\dot{z}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_\nu} - \dot{y}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_\nu}).$$

Вводя принятія нами сокращенныя обозначенія, получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= L_x, \\ \frac{dL_y}{dt} &= L_y, \\ \frac{dL_z}{dt} &= L_z. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Каждое изъ уравненій (2) выражаетъ законъ моментовъ по

отношеніи къ одной изъ координатныхъ осей:

Первая производная по времени отъ главного момента количества движенія точекъ системы относительно какой-либо координатной оси равна главному моменту вѣсъ силъ (задаваемыхъ и реакцій), приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно той же оси.

Примѣчаніе. Такъ какъ всякую неподвижную ось можно принять за координатную ось, то вышеуказанное предложеніе справедливо относительно всякой неподвижной оси.

Въ уравненія (2) можемъ ввести секторіальныя скорости точекъ системы; — получимъ:

$$2 \frac{d}{dt} \sum m_i v_{ix}^2 = L_x,$$

$$2 \frac{d}{dt} \sum m_i v_{iy}^2 = L_y,$$

$$2 \frac{d}{dt} \sum m_i v_{iz}^2 = L_z,$$

поэтому "законъ моментовъ" называется также: "законъ площадей".

Подобно тому, какъ въ законѣ движенія центра инерціи, и здѣсь мы раздѣлимъ силы на внутреннія и внешнія.

Очевидно:

$$L_x = L_x^i + L_x^e,$$

$$L_y = L_y^i + L_y^e,$$

$$L_z = L_z^i + L_z^e,$$

гдѣ значкомъ  $L^i$  обозначаемъ главный моментъ внутреннихъ силъ, а значкомъ  $L^e$  главный моментъ внешнихъ силъ относительно начала координатъ.

Сумма моментовъ для каждой двухъ равныхъ и противоположныхъ внутреннихъ силъ относительно какой угодно точки, а слѣ-

донательно и относительно какой угодно оси, очевидно, равна нулю; поэтому главный моментъ внутреннихъ силъ всегда равенъ нулю и, слѣдовательно.

$$\vec{L}_x = 0, \vec{L}_y = 0, \vec{L}_z = 0$$

Такимъ образомъ, не нарушая общности, мы можемъ написать уравненія (2) въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{L}_x}{dt} &= \vec{L}_x, \\ \frac{d\vec{L}_y}{dt} &= \vec{L}_y, \\ \frac{d\vec{L}_z}{dt} &= \vec{L}_z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Изъ уравненій (3) слѣдуетъ, что внутреннія силы не оказываютъ вліянія на измѣненіе главнаго момента количества движенія точекъ системы.

Въ случаѣ твердаго тѣла правая часть уравненій содержатъ моменты только заданныхъ силъ, если тѣло свободно, а если тѣло несвободно, то моменты заданныхъ силъ и реакцій опоръ; реакцій стержней, которые обуславливаютъ твердость тѣла (неизмѣняемость системы), суть внутреннія силы.

Соединяя для твердаго тѣла уравненія, выражающія законъ движенія центра инерціи и законъ площадей, получимъ шесть уравненій, содержащихъ только однѣ внѣшнія силы, три уравненія (4) главы V и три уравненія (3) главы VI.

Этихъ шести уравненій совершенно достаточно для опредѣленія движенія твердаго тѣла, такъ какъ въ случаѣ свободного тѣла, какъ всякой свободной неизмѣняемой системы число независимыхъ координатъ равно шести:  $3 - (3 - 6) = 6$ , — обыкновенно, три координаты центра тяжести и три Эйлеровыхъ угла; въ случаѣ несвободнаго твердаго тѣла число независимыхъ координатъ меньше шести; это число выѣстъ съ числомъ неизвѣстныхъ



проекцій реакцій опоръ составить шесть.

Разсмотримъ частный случай, когда твердое тѣло вращается вокругъ неподвижной оси; примемъ ее за одну изъ координатныхъ осей, наприимѣръ, за ось  $OZ$  (черт. 84).

Законъ моментовъ намъ даетъ уравненіе:

$$\frac{dL_z}{dt} = L_z^b,$$

правая часть котораго содержитъ моменты только заданныхъ силъ, такъ какъ моменты реакцій закрѣпленной оси относительно нея равны нулю.

Каждая точка, наприимѣръ,  $M_i$  описываетъ окружность радіуса  $r_i$ , ее скорость равна:

$$v_i = r_i \varphi',$$

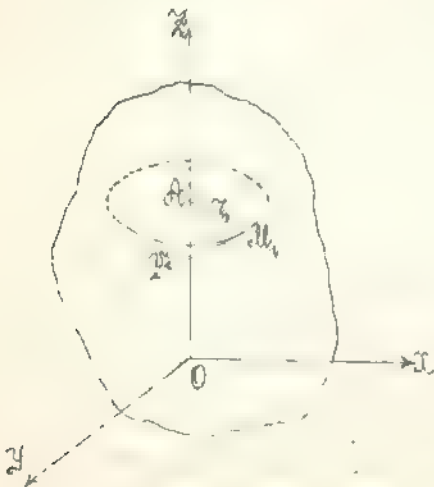
гдѣ  $\varphi$  уголъ поворота тѣла и  $\varphi'$  угловая скорость.

Пусть  $m_i$  будетъ масса того элемента тѣла, который мы займемъ матеріальной точкой  $M_i$ , тогда количество движенія точки  $M_i$  будетъ:

$$m_i v_i = m_i r_i \varphi'$$

Моментъ этого количества движенія относительно оси  $OZ$  равенъ:

$$m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \varphi'.$$



Чертежъ 84.

Главный моментъ количества движенія всѣхъ элементовъ тѣла относительно оси  $OZ$  выразится такъ:

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \varphi';$$

или, вынося общій множитель  $\varphi'$  за знакъ суммы:

$$L_z = \varphi' \sum m_i r_i^2.$$

Сумма  $\sum m_i r_i^2$  есть моментъ инерціи тѣла относительно оси  $OZ$ , который мы обозначимъ черезъ  $I$ ; тогда:

$$L_z = I \varphi' ;$$

откуда:

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d^2\varphi}{dt^2} .$$

Законъ моментовъ намъ даетъ:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = L_z^e ,$$

это и есть уравненіе вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.

Главный моментъ данныхъ силъ относительно оси  $OZ$  :

$$L_z^e = \sum (x_i Y_i^e - y_i X_i^e)$$

мы можемъ выразить, вообще говоря, черезъ уголъ  $\varphi$ , угловую скорость  $\varphi'$  и время  $t$ , и получимъ одно дифференціальное уравненіе второго порядка относительно  $t$ .

Разсмотримъ весьма важный частный случай, когда главный моментъ внешнихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно какой-либо оси равенъ нулю.

Пусть, наприимръ:

$$L_z^e = \sum (y_i Z_i^e - z_i Y_i^e) = 0 ;$$

тогда будетъ:

$$\frac{dL_z}{dt} = 0$$

и, слѣдовательно:

$$L_z = \text{const.} ,$$

или

$$\sum m_i (y_i z_i' - z_i y_i') = \text{const.} , \dots \dots \dots (4)$$

Это уравненіе, по раздѣленіи на 2, можетъ быть написано въ видѣ

$$\sum m_i \tilde{r}_i^2 = \text{const} \quad (4'_1)$$

Уравнение (4.) или (4'\_1) представляет первый интеграл дифференциальных уравнений движения системы и называется интегралом площадей в плоскости  $\tilde{yOz}$ .

Значение  $\text{const}$  в уравнении (4\_1) находим, подставляя начальные значения координат и проекций скоростей точек системы.

Когда главный момент внешних сил

$$L_y^e = 0,$$

существует интеграл площадей в плоскости  $\tilde{yOx}$ :

$$l_y = \text{const},$$

следовательно:

$$\sum m_i (\tilde{r}_i x'_i - x_i \tilde{r}'_i) = \text{const}, \dots \dots \dots (4_2)$$

или

$$\sum m_i \tilde{b}_{ix}^{(i)} = \text{const}, \dots \dots \dots (4'_2)$$

Когда главный момент внешних сил:

$$L_z^e = 0,$$

существует интеграл площадей в плоскости  $\tilde{zOy}$

$$l_z = \text{const};$$

следовательно.

$$\sum m_i (\tilde{r}_i y'_i - y_i \tilde{r}'_i) = \text{const}, \dots \dots \dots (4_3)$$

или

$$\sum m_i \tilde{b}_{iy}^{(i)} = \text{const} \dots \dots \dots (4'_3)$$

Уравнения (4\_1), (4\_2), (4\_3) или равносильные им уравнения (4'\_1), (4'\_2), (4'\_3) представляют обобщение соответствующих уравнений в случае одной точки, и мы можем воспользоваться прежним термином "закон сохранения площадей". хотя площади, описываемые радиусами векторами проекций точек на

координатную плоскость въ единицу времени, здѣсь уже не сохраняютъ постоянную величину, — говорятъ, что каждое изъ уравненій:  $(4_1)$ ,  $(4_2)$ ,  $(4_3)$  выражаетъ законъ сохраненія площадей въ соответствующей координатной плоскости для данной системы.

Такъ какъ всякую неподвижную ось можемъ принять за одну изъ координатныхъ осей, то получается слѣдующее заключеніе:

Если главный моментъ вѣншихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно какой-либо неподвижной оси равенъ нулю, то для движенія системы существуетъ интегралъ площадей въ плоскости, перпендикулярной къ этой оси, выражающій, что сумма массъ точекъ, умноженныхъ на ихъ секторіальныя скорости въ этой плоскости, сохраняетъ постоянную величину.

Если главный моментъ вѣншихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно какой-либо неподвижной точки, напримѣръ, относительно начала координатъ, равенъ нулю

$$L^0 = 0,$$

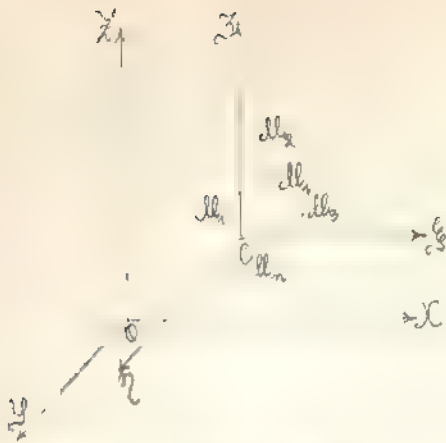
тогда одновременно:

$$L_x^0 = 0, L_y^0 = 0, L_z^0 = 0.$$

и, слѣдовательно, существуютъ три интеграла площадей въ трехъ перпендикулярныхъ плоскостяхъ, проведенныхъ черезъ эту точку.

### § 3. "Законъ моментовъ" или "законъ площадей" въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ центру инерціи

Если мы возьмемъ оси, проведенныя черезъ центръ инерціи системы и движущіяся поступательно съ центромъ инерціи, то зависимость между главнымъ моментомъ количества относительнаго движенія системы и главнымъ моментомъ силъ относительно этихъ осей, выражается уравненіями того же вида, что и уравненія (2).



Чертежъ 85.

Пусть  $C(x_c, y_c, z_c)$  будетъ центр инерціи системы (черт.85). Примемъ его за начало координатъ съ осями  $C\xi, C\eta, Cz$ , которая остаются параллельными соответственно неподвижнымъ осямъ  $Ox, Oy, Oz$ .

Если координаты какой-либо точки системы  $M_i$  при новыхъ координатныхъ осяхъ обозначимъ черезъ  $\xi_i, \eta_i, z_i$ , то, очевидно, будутъ

$$\begin{aligned} x_i &= x_c + \xi_i, \\ y_i &= y_c + \eta_i, \\ z_i &= z_c + z_i. \end{aligned}$$

Подставляя эти значенія въ основныя дифференціальныя уравненія (1), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} m_i \xi_i'' &= X_i - m_i x_c'', \\ m_i \eta_i'' &= Y_i - m_i y_c'', \\ m_i z_i'' &= Z_i - m_i z_c''. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Пологая здѣсь  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  получимъ  $3n$  уравненій.

Умножимъ третье изъ уравненій (5) на  $\eta_i$ , второе на  $z_i$  и вычтемъ второе произведеніе изъ перваго, получимъ равенство

$$m_i (\eta_i z_i' - z_i \eta_i') - m_i (x_i y_i'' - y_i x_i' - z_i z_i''),$$

лѣвая часть котораго равна:

$$\frac{d}{dt} m_i (\eta_i z_i - z_i \eta_i).$$

Подобныя равенства можемъ написать для всѣхъ точекъ системы, складывая ихъ, надемъ

$$\frac{d}{dt} \sum m_i (\eta_i \dot{z}_i' - \dot{z}_i \eta_i') = \sum (\eta_i \ddot{z}_i - \ddot{z}_i \eta_i') - x_c'' \sum m_i \eta_i + y_c'' \sum m_i \dot{z}_i.$$

Такъ какъ начало новыхъ координатныхъ осей помѣщено въ центрѣ инерціи системы, то суммъ произведеній массъ точекъ на ихъ новыя координаты равны нулю:

$$\sum m_i \xi_i = 0,$$

$$\sum m_i \eta_i = 0,$$

$$\sum m_i \dot{z}_i = 0.$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\sum m_i \xi_i = \sum m_i (x_i - x_c) = \sum m_i x_i - x_c \sum m_i = \sum m_i x_i - M x_c,$$

а эта разность, на основаніи выраженій координатъ центра инерціи (фор. 1, гл. V), равна нулю; такъ же найдемъ, что

$$\sum m_i \eta_i = \sum m_i (\psi_i - \psi_c) = 0,$$

$$\sum m_i \dot{z}_i = \sum m_i (\dot{z}_i - \dot{z}_c) = 0.$$

Принимая это во вниманіе, получаемъ:

$$\frac{d}{dt} \sum m_i (\eta_i \dot{z}_i' - \dot{z}_i \eta_i') = \sum (\eta_i \ddot{z}_i - \ddot{z}_i \eta_i');$$

совершенно подобнымъ же образомъ найдемъ

$$\frac{d}{dt} \sum m_i (\dot{z}_i \xi_i' - \xi_i \dot{z}_i') = \sum (\dot{z}_i \ddot{\xi}_i - \ddot{\xi}_i \dot{z}_i'),$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i (\xi_i \eta_i' - \eta_i \xi_i') = \sum (\xi_i \ddot{\eta}_i - \ddot{\eta}_i \xi_i').$$

Если главный моментъ количества относительнаго движенія



точекъ системы относительно центра инерціи назовемъ черезъ  $\mathbf{r}^{(c)}$ , а относительно осей  $\xi, \eta, \zeta$  черезъ  $\mathbf{r}_x^{(c)}, \mathbf{r}_y^{(c)}, \mathbf{r}_z^{(c)}$ , и главный моментъ силъ относительно центра инерціи черезъ  $\mathbf{L}^{(c)}$ , а относительно тѣхъ же осей черезъ  $\mathbf{L}_x^{(c)}, \mathbf{L}_y^{(c)}, \mathbf{L}_z^{(c)}$ , то на основаніи полученныхъ уравненій можемъ написать:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_x^{(c)}}{dt} &= \mathbf{L}_x^{(c)}, \\ \frac{d\mathbf{L}_y^{(c)}}{dt} &= \mathbf{L}_y^{(c)}, \\ \frac{d\mathbf{L}_z^{(c)}}{dt} &= \mathbf{L}_z^{(c)}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравненія (6) того же вида, что и уравненія (2). Вообразимъ неизмѣняемую среду, движущуюся поступательно вмѣстѣ съ центромъ инерціи системы, точки системы будутъ совершать относительно этой среды <sup>отр</sup> относительныя движенія въ этой средѣ; уравненія (6) и выражаютъ законъ моментовъ или законъ площадей въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ этой средѣ.

Раздѣляя силы, дѣйствующія на точки системы, на внѣшнія и внутреннія, найдемъ уравненія, аналогичныя уравненіямъ (3):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_x^{(c)}}{dt} &= \mathbf{L}_x^{(c)}, \\ \frac{d\mathbf{L}_y^{(c)}}{dt} &= \mathbf{L}_y^{(c)}, \\ \frac{d\mathbf{L}_z^{(c)}}{dt} &= \mathbf{L}_z^{(c)}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если главный моментъ <sup>внѣшнихъ</sup> силъ относительно какой-либо оси, проходящей черезъ центръ инерціи, во все время движенія равенъ нулю, наприимръ, если  $\mathbf{L}_x^{(c)} = 0$ , тогда <sup>тогда</sup>

$$\frac{d\mathbf{L}_x^{(c)}}{dt} = 0, \quad (8)$$

и, следовательно,

.....

$$\sum m_i v_i^2 = \text{const.}$$

т.е. сумма произведений массъ точекъ на ихъ относительныя секторіальныя скорости въ плоскости  $\pi$  остается постоян -  
ною.

Уравненіе (8) выражаетъ законъ сохраненія площадей въ от -  
носительномъ движеніи системы въ плоскости, проходящей черезъ  
центръ инерціи и параллельной пл.  $\pi$ .

Если главный моментъ вѣшнихъ силъ относительно центра  
инерціи во все время движенія равенъ нулю:  $L^{\text{вѣ}} = 0$ , то

$$L_x^{\text{вѣ}} = 0, L_y^{\text{вѣ}} = 0, L_z^{\text{вѣ}} = 0,$$

и, слѣдовательно, главный моментъ количества относительнаго дви -  
женія точекъ системы  $L^{\text{от}}$  сохраняетъ при движеніи системы по -  
стоянную величину и постоянное направленіе; имъ имѣемъ законъ  
сохраненія площадей въ трехъ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ  
центръ инерціи:

$$\begin{cases} L_x^{\text{от}} = \text{const.} \\ L_y^{\text{от}} = \text{const.} \\ L_z^{\text{от}} = \text{const.} \end{cases}$$

Въ этомъ случаѣ законъ сохраненія площадей имѣетъ мѣсто  
во всякой плоскости, которая проходитъ черезъ центръ инерціи  
и при движеніи остается себѣ параллельной, потому что всякую  
такую плоскость, отдѣльно взятую, можемъ считать параллельною  
одной изъ неподвижныхъ координатныхъ плоскостей.

Разсматриваемый случай представляется, наприимѣръ, тогда,  
когда движется свободное твердое тѣло, подчиненное только дѣй -  
ствію силъ тяжести: равнодѣйствующая этихъ силъ проходитъ че -  
резъ центръ тяжести (центръ инерціи), и, слѣдовательно, глав -  
ный моментъ ихъ относительно центра тяжести равенъ нулю ( $L^{\text{вѣ}} = 0$ ); моментъ вращательнаго движенія тѣла вокругъ центра тя -

жести  $\rho^{(0)}$  сохраняетъ постоянную величину и постоянное направление; для движенія тѣла въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть три интеграла площадей въ трехъ плоскостяхъ, проходящихъ черезъ центръ тяжести:

$$\sum m_i \epsilon_{1i}^{\omega} = \text{const.},$$

$$\sum m_i \epsilon_{2i}^{\omega} = \text{const.},$$

$$\sum m_i \epsilon_{3i}^{\omega} = \text{const.}$$

Тѣ же три интеграла площадей имѣютъ мѣсто при движеніи системы свободныхъ матеріальныхъ точекъ, на которыя дѣйствуютъ только силы взаимнаго притяженія или отталкиванія, — наипрѣдѣльнѣйшій примѣръ такой системы представляетъ солнечная система.

## Г Л А В А VII.

### ЗАКОНЪ ЖИВОЙ СИЛЫ.

#### § 1.

Живою силою системы или кинетической энергіей системы матеріальныхъ точекъ ( $T$ ) называется сумма живыхъ силъ всѣхъ точекъ системы:

$$T = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{2} \quad (1)$$

Кинетическую энергію системы можно выразить въ видѣ суммы двухъ слагаемыхъ.

Изъ уравненія (1) имѣемъ:

$$T = \sum \frac{m_i}{2} (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2) \quad (1)$$

Приемъ центръ инерціи системы за начало координатъ съ осями, параллельными осямъ  $OX$ ,  $OY$ , и  $OZ$  (черт. 81). Очевидно:

$$\begin{aligned} x_i &= x_c + \xi_i, \\ y_i &= y_c + \eta_i, \\ z_i &= z_c + \zeta_i; \end{aligned}$$

откуда:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_c' + \xi_i', \\ y_i' &= y_c' + \eta_i', \\ z_i' &= z_c' + \zeta_i'. \end{aligned}$$

Послѣ подстановки получимъ изъ формулы (1):

$$T = \sum \frac{m_i}{2} [(x_c' + \xi_i')^2 + (y_c' + \eta_i')^2 + (z_c' + \zeta_i')^2]$$

или

$$T = \sum \frac{m_i}{2} (x_c'^2 + y_c'^2 + z_c'^2) + \sum \frac{m_i}{2} (\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2) + \sum m_i (x_c' \xi_i' + y_c' \eta_i' + z_c' \zeta_i')$$

Введемъ слѣдующія обозначенія:

Пусть  $M = \sum m_i$  - суммъ массъ всѣхъ точекъ системы - короче,  $M$  масса системы;

$$v_c = \sqrt{x_c'^2 + y_c'^2 + z_c'^2} \quad - \text{ скорость центра инерціи;}$$

$$u_i = \sqrt{\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2} \quad - \text{ относительная скорость точ-}$$

ки  $M_i$  по отношенію къ средѣ, движущейся поступательно съ центромъ инерціи.

Тогда мы имѣемъ:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i u_i^2 + x_c' \sum m_i \xi_i' + y_c' \sum m_i \eta_i' + z_c' \sum m_i \zeta_i';$$

но такъ какъ начало координатъ въ центрѣ инерціи, то

$$\sum m_i \xi_i = 0, \sum m_i \eta_i = 0, \sum m_i \zeta_i = 0,$$

во все время движения, следовательно, и производныя во времени:

$$\sum m_i \dot{\xi}_i = 0, \sum m_i \dot{\eta}_i = 0, \sum m_i \dot{\zeta}_i = 0,$$

а тогда находимъ:

$$T = \frac{1}{2} dI\omega^2 + \frac{1}{2} \sum m_i u_i^2 \quad (2)$$

Уравнение (2) выражает теорему Кoenig'a:

Живая сила системы равна живой силѣ центра инерціи, въ предположеніи, что масса его равна массѣ всей системы, плюсъ живая сила системы въ ея относительномъ движеніи по отношенію къ центру инерціи (точнѣе по отношенію къ средѣ, движущейся поступательно въслѣдъ съ центромъ инерціи).

Выразимъ живую силу твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси съ угловою скоростью  $\omega$ . Пусть  $m_i$  будетъ масса того элемента тѣла, который мы называемъ точкой  $M_i$ , тогда живая сила точки  $M_i$  (черт. 86) будетъ:

$$\frac{m_i J_i^2}{2} = \frac{m_i J_i^2 \omega^2}{2};$$

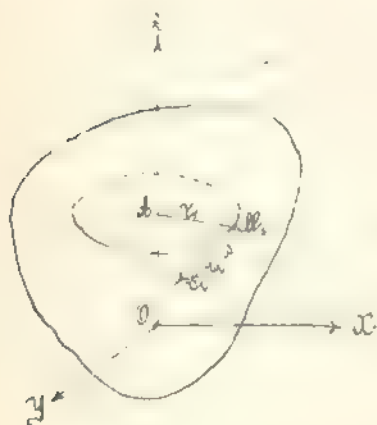
следовательно, живая сила тѣла:

$$T = \sum m_i r_i^2 \omega^2,$$

или

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2.$$

Сумма произведеній массъ точекъ системы на квадраты ихъ разстояній отъ нѣкоторой оси называется моментомъ инерціи системы относи-



Чертежъ 86.

сительно этой оси

(обозначая моментъ инерціи тѣла относительно оси  $OZ$ ,

$\sum m_i \dot{r}_i^2$ , через  $\dot{\theta}$ , имѣетъ:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \sum m_i r_i^2,$$

слѣдовательно, живая сила твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, равна половинѣ произведенія момента инерціи относительно этой оси на квадратъ угловой скорости.

Найдемъ живую силу твердаго тѣла, движущагося какъ угодно. По теоремѣ Koenig'a:

$$T = M v_c^2 + \frac{1}{2} \sum m_i u_i^2.$$

Относительное движеніе тѣла по отношенію къ центру тяжести есть вращеніе тѣла вокругъ центра тяжести. Вращеніе вокругъ точки въ каждый моментъ можетъ быть рассматриваемо, какъ вращеніе вокругъ мгновенной оси, проходящей черезъ эту точку. Такимъ образомъ, относительное движеніе тѣла по отношенію къ центру тяжести можно рассматривать, какъ вращеніе вокругъ мгновенной оси  $C\Omega$ , проходящей черезъ центръ тяжести  $C$  (черт. 87), слѣдовательно, на основаніи предыдущаго:

$$\frac{1}{2} \sum m_i u_i^2 = \frac{1}{2} J_c^2 \omega^2,$$

гдѣ  $J_c^2$  обозначаетъ моментъ инерціи тѣла относительно мгновенной оси, проходящей черезъ центръ тяжести.

Такимъ образомъ, живая сила твердаго тѣла въ какомъ угодно движеніи равна:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c^2 \omega^2.$$

Фигура 87.

Когда тѣло движется поступательно, второй членъ равенъ нулю, и

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2.$$



## § 2. Работа силъ, приложенныхъ къ системѣ.

Если  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  - проекціи равнодѣйствующей всѣхъ силъ (заданныхъ, реакцій и силъ тренія), приложенныхъ къ точкѣ  $M_i$ , то элементарная работа равнодѣйствующей на безконечно маломъ перемѣщеніи равна:

$$X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i$$

Сумма элементарныхъ работъ для всѣхъ точекъ системы будетъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

Интегрируя, получимъ сумму работъ на конечномъ перемѣщеніи системы.

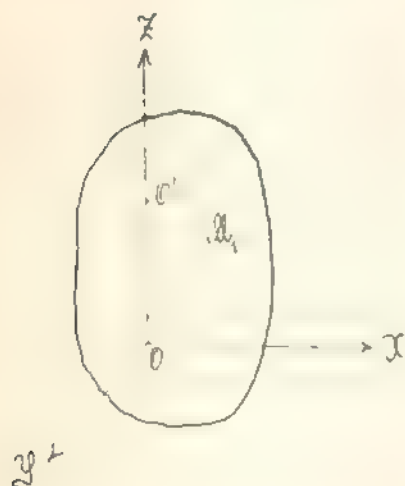
Возьмемъ твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси. Знаемъ, что сумма элементарныхъ работъ реакцій тѣхъ связей, которыя обуславливаютъ неизмѣняемость системы (твердость тѣла), равна нулю. Точно также равна нулю работа реакцій какъ той,

такъ и другой закрѣпленной точки:  $O$  и  $O'$  (черт. 86), ибо перемѣненія ихъ равны нулю; поэтому для твердаго тѣла, вращающагося вокругъ неподвижной оси, сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ равна суммѣ работъ однихъ заданныхъ силъ, т. е. равна:

$$\sum (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

Такъ какъ въ нашемъ случаѣ ось вращенія принята за ось  $OZ$ , то для каждой точки тѣла

координата  $Z_i = \text{const.}$



Чертежъ 86.

поэтому

$$Z_i dz_i = 0 ,$$

и, следовательно, сумма элементарных работ всех сил будет:

$$\sum (X_i dx_i + Y_i dy_i).$$

Из кинематики известно, что

$$x_i = r_i \cos(\alpha_i, X) = -y_i \varphi',$$

$$y_i' = r_i \cos(\alpha_i, Y) = x_i \varphi',$$

где  $\varphi$  — угол поворота, следовательно:

$$dx_i = -y_i d\varphi ,$$

$$dy_i = x_i d\varphi .$$

Подставляя эти значения в выражение суммы элементарных работ, найдем:

$$d\varphi \sum (-X_i y_i + Y_i x_i) = L_i d\varphi .$$

Таким образом, сумма элементарных работ всех сил, действующих на твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, равна главному моменту всех данных сил относительно оси вращения, помноженному на бесконечно малый угол поворота.  $d\varphi = \omega dt$ , где  $\omega$  — угловая скорость тела.

Когда твердое тело свободно и движется как угодно, работа во вращательном движении вокруг центра инерции, на основании предыдущего, будет:

$$L_i d\varphi = L_c \omega dt ,$$

где  $L_c$  — главный момент всех данных сил относительно мгновенной оси  $CS$ , проходящей через центр тяжести (черт. 88), а  $\omega$  — угловая скорость.

Работа в поступательном движении тела вместе с центром инерции равна:

$$a_x \sum X_i + a_y \sum Y_i + a_z \sum Z_i ,$$

такъ какъ

$$dx_i = dx_c, \quad dy_i = dy_c, \quad dz_i = dz_c.$$

Если геометрическую сумму всѣхъ данныхъ силъ (главный векторъ) обозначимъ черезъ  $V$ , а проекціи ея черезъ  $V_x, V_y, V_z$ , то работа въ поступательномъ движеніи тѣла вѣстѣ съ центромъ инерціи будетъ:

$$V_x dx_c + V_y dy_c + V_z dz_c = V \cos \alpha_c \cos (V, \alpha_c).$$



Чертежъ 89.

Такимъ образомъ, сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, движущемуся какъ угодно, будетъ равна суммѣ двухъ работъ:

$$V ds_c \cos (V, \alpha_c) + L_c \omega dt.$$

### § 3. Законъ живой силы.

Найдемъ зависимость между живою силою системы и работою силъ, къ системѣ приложенныхъ. Для этого воспользуемся дифференціальными уравненіями движенія:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= X_1, \\ m_2 \ddot{y}_1 &= Y_1, \\ m_3 \ddot{z}_1 &= Z_1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

гдѣ нужно положить  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Умножимъ первое изъ уравненій (3) на  $dx_1$ , второе на  $dy_1$ , третье на  $dz_1$ , и затѣмъ сложимъ; тогда получимъ:

$$m_1 (\dot{x}_1 dx_1 + \dot{y}_1 dy_1 + \dot{z}_1 dz_1) dt = X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1;$$

откуда

$$\frac{m_1}{2} \frac{d(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2)}{dt} = X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1,$$

или

$$\frac{d m \cdot v_i^2}{2} = \mathcal{Q}_i dx_i + \mathcal{Q}_i^y dy_i + \mathcal{Q}_i^z dz_i$$

Последнее равенство может быть написано для каждой точки системы; взявши сумму этих равенств для всех точек системы, получим:

$$dT = \sum_{i=1}^{1+n} (\mathcal{Q}_i dx_i + \mathcal{Q}_i^y dy_i + \mathcal{Q}_i^z dz_i) \quad (4)$$

Уравнение (4) выражает законъ живой силы въ дифференціальной формѣ:

*Безконечно малое приращеніе живой силы системы точекъ, получаемое при безконечно маломъ перемещеніи системы, равно суммъ элементарныхъ работъ всѣхъ силъ (задаваемыхъ и реакцій), приложенныхъ къ точкамъ системы, на соответствующихъ безконечно малыхъ перемещеніяхъ этихъ точекъ.*

Такъ какъ при движеніи точекъ системы всѣ переменныя величины, связанныя съ этими точками, можно рассматривать, какъ функціи отъ одной переменной (напримѣръ, отъ времени  $t$ ), то мы можемъ взять отъ обѣихъ частей уравненія (4) интегралы (по этой переменной) отъ одного положенія (1) системы, до другого положенія (2); получимъ:

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{1+n} \left( \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{Q}_i dx_i + \int_{y_1}^{y_2} \mathcal{Q}_i^y dy_i + \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{Q}_i^z dz_i \right) \quad \dots \quad (5)$$

гдѣ  $T_1$  и  $T_2$  обозначаютъ живую силу системы въ соответствующихъ крайнихъ положеніяхъ системы: (1) и (2).

Уравненія (5) выражаютъ законъ живой силы въ конечной формѣ:

*Приращеніе живой силы системы, получаемое при переходѣ системы изъ одного положенія въ другое, равно суммъ работъ всѣхъ силъ (задаваемыхъ и реакцій), приложенныхъ*

къ точкамъ системы, на протяженіи путей, пройденныхъ точками при этомъ переходѣ.

Уравненія (4) и (5) выражаютъ общій законъ живой силы.

Законъ живой силы въ нѣкоторыхъ случаяхъ одинъ можетъ опредѣлить движеніе системы, именно тогда, когда положеніе системы опредѣляется только одной переменной величиной, т. е. когда число связей на единицу меньше числа координатъ. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что система имѣетъ одну степень свободы. Очевидно, для опредѣленія движенія такой системы нужно имѣть одно уравненіе, — его и даетъ законъ живой силы.

Примеръ системы, имѣющей одну степень свободы, представляетъ твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси; — всякая машина въ большинствѣ случаевъ можетъ быть рассматриваема, какъ система съ одной степенью свободы.

Замѣтимъ, что уравненіе (4), называемое перѣдко уравненіемъ работы, со времени Карно есть основное уравненіе въ теоріи машинъ: въ большинствѣ случаевъ оно достаточно для опредѣленія хода машины.

Уравненіе работы въ теоріи машинъ представляется въ видѣ

$$(T_2 + \mathcal{F}_2) - (T_1 + \mathcal{F}_1) (\mathcal{P}_m - \mathcal{P}_u - P_v) ;$$

здѣсь  $T_1$ ,  $\mathcal{F}_1$ ,  $T_2$ ,  $\mathcal{F}_2$  суть живыя силы видимыхъ и невидимыхъ движеній въ машинѣ въ двухъ ея положеніяхъ;  $\mathcal{P}_m$ ,  $\mathcal{P}_u$ ,  $P_v$  — абсолютныя величины работъ на соотвѣствующихъ пути:  $\mathcal{P}_m$  — движущихъ силъ,  $\mathcal{P}_u$  — полезныхъ сопротивленій и  $P_v$  — вредныхъ сопротивленій.

Если система подчинена только идеальнымъ связямъ, уравненія которыхъ  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = 0$ ,  $f_3 = 0$  не содержатъ явна времени  $t$ , то сумма элементарныхъ работъ реакцій каждой связи равна нулю

$$\sum \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 \right) = \lambda_1 \frac{df_1}{dt} dt = 0;$$

Въ этомъ случаѣ въ оба уравненія, выражающія законъ живой силы, входятъ работы только заданныхъ силъ, какъ въ случаѣ системы свободной:

$$dT = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) \quad (6)$$

и

$$T_2 - T_1 = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{x_1}^{x_2} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) \quad (7)$$

#### § 4. Силы, имѣющія потенціалъ.

Если заданныя силы, приложенныя къ точкамъ системы, таковы, что сумма ихъ элементарныхъ работъ представляетъ полный дифференціалъ нѣкоторой функціи отъ координатъ точекъ, т.е., если удовлетворяется равенство:

$$\sum (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = dU(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n) \quad (8)$$

тогда говорятъ, что данныя силы имѣютъ потенціалъ.

Функція  $U$  называется *силовою функціей* для данныхъ силъ.

Очевидно,

$$dU = \sum \left( \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial U}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial U}{\partial z_i} dz_i \right)$$

Сравнивая это равенство съ (8), найдемъ:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad *)$$

\*) Если эти равенства принять какъ опредѣленіе силъ, имѣющихъ потенціалъ, то могутъ представиться случаи, въ которыхъ силовая функція  $U$  будетъ содержать, промѣ координатъ точекъ, и время  $t$  ленимъ образомъ: но тогда сумма элементарныхъ работъ будетъ равна

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$



для всѣхъ значеній  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Такимъ образомъ, проекціи на координатныя оси силъ, выѣм-  
ныхъ силовую функцію, выражаются частными производными отъ  
этой функціи по соответствующимъ координатамъ.

Силовая функція можетъ не содержать нѣкоторыхъ координатъ,  
тогда соответствующія проекціи силъ равны нулю.

*Примеры силъ, имѣющихъ потенціалъ.*

1) *Сила тяжести.* Пусть на точки системы дѣйствуютъ только  
силы тяжести.

Если ось  $OZ$  направлена по вертикали вверхъ, то проекціи  
силъ, приложенной къ точкѣ  $M_i$  на оси  $OX$  и  $OY$  будутъ рав-  
ны нулю, а проекція на ось  $OZ$  равна  $-m_i g$ , слѣдовательно,  
сумма элементарныхъ работъ выразится такъ:

$$\sum -m_i g dz_i = -d \left\{ \sum m_i g z_i \right\} = dU,$$

и силовая функція будетъ:

$$U = -g \sum m_i z_i = -M g \bar{z}.$$

2) Между точками системы дѣйствуютъ силы взаимнаго притя-  
женія или отталкиванія, зависящія только отъ разстоянія.

Сначала рассмотримъ систему изъ двухъ точекъ  $M_1$  и  $M_2$ .  
Обозначимъ разстояніе между ними черезъ  $r_{12}$ , а величину силъ,  
дѣйствующей между этими же точками, черезъ  $f_{12}(r_{12})$ . Усло-  
виемъ приписывать этой функціи знакъ  $+$ , когда сила отталки-  
вательная, и знакъ  $-$ , когда притягательная.

Проекціи силъ, приложенной къ точкѣ  $M_1$ , будутъ тогда:

$$f_{12}(r_{12}) \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \quad f_{12}(r_{12}) \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \quad f_{12}(r_{12}) \frac{z_2 - z_1}{r_{12}};$$

а проекціи силъ, приложенной къ точкѣ  $M_2$ , будутъ тѣ же, но  
съ обратными знаками.

Сумма элементарных работ представится въ видѣ:

$$\begin{aligned} & \int_{r_{1,2}}^{r_{1,2}'} \left\{ (x_1 - x_2) dx_1 + (y_1 - y_2) dy_1 + (z_1 - z_2) dz_1 - (x_2 - x_1) dx_2 - (y_2 - y_1) dy_2 - (z_2 - z_1) dz_2 \right\} = \\ & = \int_{r_{1,2}}^{r_{1,2}'} \left\{ (x_1 - x_2) d(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) d(y_1 - y_2) + (z_1 - z_2) d(z_1 - z_2) \right\} = \\ & = \frac{f_{1,2}(r_{1,2})}{r_{1,2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot d(r_{1,2}^2) = f_{1,2}(r_{1,2}) \cdot dr_{1,2}. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, сумма элементарныхъ работъ равна дифференціалу функціи, которая выражается интеграломъ:

$$\int f_{1,2}(r_{1,2}) dr_{1,2};$$

слѣдовательно, этотъ интегралъ и будетъ силовая функція:

$$U = \int f_{1,2}(r_{1,2}) dr_{1,2};$$

Если система состоитъ изъ  $n$  точекъ ( $n > 2$ ), то для каждой пары точекъ ( $M_i$  и  $M_k$ ) можемъ написать такую силовую функцію, и сумма элементарныхъ работъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ въ системѣ, будетъ равна дифференціалу слѣдующей функціи:

$$U = \sum_{i,k} \int f_{i,k}(r_{i,k}) dr_{i,k},$$

гдѣ  $i$  и  $k$  имѣютъ всѣ возможные различныя значенія отъ 1 до  $n$ ; эта функція и будетъ силовой функціей для данной системы.

Въ важнѣйшемъ частномъ случаѣ, когда точки системы взаимно притягиваются по закону Ньютона  $f_{i,k}(r_{i,k}) = -\frac{\varepsilon m_i m_k}{r_{i,k}^2}$ , силовая функція будетъ:

$$U = \sum_{i,k} \int \varepsilon \frac{m_i m_k}{r_{i,k}^2} dr_{i,k} = \varepsilon \sum_{i,k} \frac{m_i m_k}{r_{i,k}}.$$

3) На точки системы дѣйствуютъ силы притяженія или отталкиванія, исходящія отъ внешнихъ (не принадлежащихъ системѣ) центровъ  $C_1, C_2$  и выражающіяся по величинѣ некоторыми функціями постояннѣй точекъ отъ этихъ центровъ.

Если вообще на точку  $M_i$  действует со стороны внешнего центра  $O_j$  сила, величина которой равна некоторой функции расстояния  $(M_i, O_j)$ , именно  $F_{ij}(r_{ij})$ , причем функции  $F_{ij}(r_{ij})$  приписываемъ знакъ  $+$  въ случаѣ отталкивательной силы и знакъ  $-$  въ случаѣ силъ притягательной. Тогда сумма элементарныхъ работъ выразится дифференціаломъ функции

$$U = \sum_{i,j} \int F_{ij}(r_{ij}) dr_{ij},$$

которая и будетъ силовой функцией для рассматриваемаго случая.

Перейдемъ теперь къ уравненію (8).

Интегрируя обѣ части этого уравненія отъ одного положенія (1) системы до какого-либо слѣдующаго ея положенія (2), находимъ:

$$\sum_{i,j} \int_{(1)}^{(2)} (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i) = U_2 - U_1 \quad (9)$$

Слѣдовательно, работа силъ, приложенныхъ къ системѣ и нѣющихъ потенціалъ, на некоторомъ пути системы, равна разности значений силовой функции для крайнихъ положеній системы.

Въ большинствѣ случаевъ силовая функция есть функция однозначная, и тогда, какъ это слѣдуетъ изъ уравненія (9), сумма работъ силъ на некоторомъ перемѣщеніи системы зависитъ только отъ крайнихъ положеній системы и не зависитъ отъ формъ того пути, по которому система переходитъ отъ одного положенія въ другое.

Въ частномъ случаѣ, когда система, выйдя изъ положенія (1) и совершивъ нѣкоторый путь, приходитъ обратно въ то же положеніе (1), тогда  $U_2 = U_1$ , и слѣдовательно, сумма работъ силъ на всемъ пути системы въ этомъ случаѣ равна нулю.

# § 5. Интегралъ живой силы. Законъ сохранения живой силы.

## Законъ сохранения полной энергии.

Если задаваемые силы имѣютъ потенціалъ, тогда, на основаніи уравненій (6) и (8), имѣемъ:

$$dT = dU$$

Интегрируя это уравненіе, получимъ:

$$T = U + h,$$

или

$$T - U = h. \quad \dots \dots (10)$$

гдѣ  $h$  - постоянная произвольная, опредѣляемая по начальнымъ даннымъ, т.е. по начальнымъ скоростямъ и начальнымъ координатамъ точекъ системы.

Уравненіе (10) представляетъ интегралъ для задачи о движеніи системы при существованіи потенціала.

Этотъ интегралъ называется интеграломъ живой силы.

**Примѣръ.** *Задача n* *явлъ* - такъ называется задача о движеніи системы  $n$  матеріальныхъ точекъ при дѣйствіи внутреннихъ силъ (притяженія или отталкиванія), величины которыхъ суть функціи разстояній; - важнѣйшій частный случай: движеніе  $n$  точекъ, взаимно-притягивающихся по закону Ньютона. Задача  $n$  тѣмъ допускаетъ интегралъ живой силы; кромѣ того, она допускаетъ, какъ это слѣдуетъ изъ предыдущаго, еще девять интеграловъ: шесть интеграловъ центра инерціи и три интеграла площадей.

При существованіи потенціала, на основаніи уравненій (7) и (8), имѣемъ:

$$T_2 - T_1 = U_2 - U_1 \quad \dots \quad (11)$$

то же уравненіе, очевидно, легко получить и изъ уравненій (10).

Уравненіе (11) выражаетъ законъ сохраненія живой силы\*).

Приращеніе живой силы системы при переходѣ ея изъ одного положенія въ другое, равно разности значеній силовой функціи для крайнихъ положеній системы и, следовательно, не зависитъ отъ путей, по которымъ при этомъ переходѣ перемѣщаются точки системы.

Отсюда слѣдуетъ, что если, при существованіи потенціала, система, выйдя изъ какого нибудь положенія, вернется въ это положеніе, то она вознаграждается съ тою же живою силою, съ которою вышла:

$$T_2 = T_1$$

вслѣдствіе того, что

$$U_2 = U_1$$

----- " -----

Система подчиненная дѣйствію только внутреннихъ силъ, ииѣющихъ потенціалъ, называется консервативною.

Потенціалъ для внутреннихъ силъ обозначимъ черезъ  $U^1$ . Обозначимъ черезъ  $U^2$  значеніе силовой функціи  $U^2$  для нѣкотораго опредѣленнаго ("вулевого") положенія системы. Разность

$$U^2 - U^1 = P$$

называется потенціальною энергіею системы и выражаетъ работу внутреннихъ силъ, которую онѣ совершаютъ при переходѣ изъ дан-

\*) Предполагается, что силовая функція  $U$  однозначна

наго положенія въ положеніе нулевое.

За нулевое положеніе удобно принимать то, въ которомъ силовая функція имѣетъ наибольшее значеніе, потому что тогда потенциальная энергія будетъ вездѣ величина положительная.

Если система консервативная, то на основаніи уравн. (10)

$$T - U = h(\text{const}).$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ этого равенства по  $U_0$ , получимъ:

$$T + (U_0 - U) = (h + U_0) (\text{const}).$$

или

$$T + P = \text{const} \dots \dots \dots (12)$$

Сумма кинетической энергіи (живой силы) и потенциальной энергіи системы называется *полной энергіей системы*. Обозначимъ ее черезъ  $E$ .

Уравненіе (12) выражаетъ законъ сохраненія энергіи: для консервативной системы полная энергія постоянна.

$$E = \text{const}.$$

Когда на систему, кромѣ внутреннихъ силъ, имѣющихъ потенциалъ, дѣйствуютъ *внѣшнія* силы, тогда полная энергія системы не будетъ оставаться постоянной: приращеніе полной энергіи системы на нѣкоторомъ переищженіи ея будетъ равно суммѣ работъ внѣшнихъ силъ на этомъ переищженіи.

Мы рассмотрѣли, такимъ образомъ, всѣ три закона динамики: законъ движенія центра инерціи, законъ площадей или законъ моментовъ и законъ живой силы, которые, какъ уже было выше указано, имѣютъ мѣсто для движенія матеріи во всѣхъ ея формахъ.



## Г Л А В А VIII.

### МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ.

Какъ мы уже знаемъ, моментомъ инерціи системы относительно оси называется сумма произведеній массъ точекъ системы на квадраты ихъ разстояній отъ этой оси

$$J = \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i^2 .$$

Для твердаго тѣла также

$$J = \sum m . r^2 ,$$

гдѣ  $m$  обозначаетъ массу какого либо элемента тѣла или той матеріальной точки, которая его представляетъ,  $r$  — разстояніе этой точки отъ оси вращенія, и число слагаемыхъ бесконечно велико; написанная сумма можетъ быть выражена интеграломъ.

Мы будемъ имѣть въ виду, главнымъ образомъ, моменты инерціи тѣла, въ случай надобности выведенія ниже заключенія легко распространяются на случай любой системы матеріальныхъ точекъ.

Обозначимъ моменты инерціи тѣла или какой-угодно системы вообще, относительно координатныхъ осей  $Ox$  ,  $Oy$  ,  $Oz$  соответственно черезъ  $A$  ,  $B$  и  $C$  .

Очевидно:

$$A = \sum m(y^2 + z^2) .$$

$$B = \sum m(z^2 + x^2) ,$$

$$C = \sum m(x^2 + y^2).$$

Эти три момента инерции найдемъ, зная три суммы:

$$\sum m x^2, \sum m y^2, \sum m z^2.$$

Въ случаѣ твердаго тѣла эти суммы выражаются интегралами.

Если  $k$  плотность тѣла,  $d\sigma$  - объемъ элемента тѣла, то масса элемента равна

$$k \cdot d\sigma,$$

и сумма  $\sum m x^2$  выразится интеграломъ:

$$\int k x^2 d\sigma,$$

но

$$d\sigma = dx \cdot dy \cdot dz,$$

поэтому сумма  $\sum m x^2$  представляется въ видѣ тройного интеграла:

$$\iiint k x^2 dx dy dz.$$

распространеннаго на весь объемъ тѣла.

Подобными интегралами выражаются суммы  $\sum m y^2, \sum m z^2$

Когда тѣло однородной плотности, тогда  $k$  - величина постоянная и можетъ быть вынесена за знакъ интеграла; - это обстоятельство облегчаетъ нахождение соответствующихъ интеграловъ.

Моменты инерции твердаго тѣла относительно координатныхъ осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  могутъ быть выражены соответственно формулами:

$$A = \iiint k (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$B = \iiint k (z^2 + x^2) dx dy dz,$$

$$C = \iiint k (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

§ 1. Моменты инерции относительно осей, проходящих через начало координатъ. Эллипсоидъ инерции.

Найдемъ выраженіе момента инерціи тѣла относительно оси  $OZ$  (черт. 90), проходящей черезъ начало координатъ и составляющей съ координатными осями углы  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Пусть  $M$  одна изъ точекъ тѣла.

Квадратъ разстоянія  $ML$  ( $ML \perp OZ$ ) точки  $M(x, y, z)$  отъ оси  $OZ$ :

$$ML^2 = OM^2 - OL^2;$$

но

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

а

$$OL = OM \cos(\angle M, OZ) = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma.$$

следовательно:

$$ML^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2;$$

или, такъ какъ

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1;$$

$$ML^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2;$$

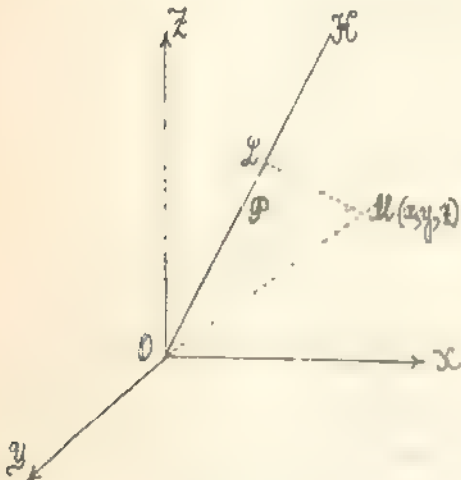
откуда.

$$\begin{aligned} ML^2 &= (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma \\ &\quad - 2yx \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \gamma \cos \alpha - 2xy \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Тогда моментъ инерціи тѣла относительно оси  $OZ$  выразится такъ

$$\begin{aligned} J &= \cos^2 \alpha \cdot \sum m(y^2 + z^2) + \cos^2 \beta \cdot \sum m(x^2 + z^2) + \cos^2 \gamma \cdot \sum m(x^2 + y^2) \\ &\quad - 2 \cos \beta \cos \gamma \cdot \sum m y x - 2 \cos \gamma \cos \alpha \cdot \sum m x z - 2 \cos \alpha \cos \beta \cdot \sum m x y. \end{aligned}$$

Замѣчаемъ, что коэффициенты при квадратахъ cosinus'овъ



Чертежъ 90.

суть моменты инерціи относительно координатных осей, обозначенные нами через  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Коэффициенты при удвоенных произведениях  $\cosinus$  овъ обозначимъ буквами  $D$ ,  $E$ ,  $F$  :

$$D = \sum m y^2,$$

$$E = \sum m x^2,$$

$$F = \sum m xy.$$

Суммы  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , называются произведениями инерціи (products of inertia, produits de l'inertie) или центробѣжными моментами инерціи; для тѣла они выражаются также соотвѣтствующими интегралами

$$D = \int k y^2 dv = \iiint k y^2 dx dy dz,$$

$$E = \int k x^2 dv = \iiint k x^2 dx dy dz,$$

$$F = \int k xy dv = \iiint k xy dx dy dz$$

Такимъ образомъ, мы можемъ написать моментъ инерціи относительно оси  $OZ$  въ слѣдующемъ видѣ

$$I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2D \cos \beta \cos \gamma - 2E \cos \gamma \cos \alpha - 2F \cos \alpha \cos \beta \quad (1)$$

Эту формулу мы и имѣли въ виду получить; съ помощью ея мы можемъ вычислить моментъ инерціи относительно любой заданной оси, проходящей черезъ начало координатъ, если намъ извѣстны моменты инерціи относительно трехъ координатныхъ осей и произведенія инерціи въ трехъ координатныхъ плоскостяхъ.

Весьма часто представляютъ моментъ инерціи въ видѣ произведенія массы на квадратъ нѣкоторой длины:

$$I = M \rho^2;$$

длина  $\rho$  называется плечомъ инерціи или радіусомъ инерціи и

вычисляется по формулѣ:

$$\varrho = \sqrt{\frac{J}{x^2}}$$

Моментъ инерціи относительно всякой оси выражается ѣвоторымъ числомъ. Число, выражающее величину  $\frac{1}{\sqrt{J}}$ , можемъ изобразить ѣвоторымъ опредѣленнымъ отрѣзкомъ, выбравши для этого опредѣленный масштабъ. Условимся на каждой оси, проходящей черезъ начало координатъ, откладывать по ту и другую сторону отъ начала длину, изображающую  $\frac{1}{\sqrt{J}}$ , гдѣ  $J$  моментъ инерціи относительно этой оси.

Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ  $P$ , для которыхъ радиусъ-векторъ  $\rho^P$  равенъ  $\frac{1}{\sqrt{J}}$ , будетъ поверхность эллипсоида, имѣющаго центръ въ началѣ координатъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ точку  $P(x, y, z)$  лежащую на оси  $OX$ . Координаты этой точки будутъ:

$$x = \frac{1}{\sqrt{J}} \cos \alpha; \quad y = \frac{1}{\sqrt{J}} \cos \beta, \quad z = \frac{1}{\sqrt{J}} \cos \gamma.$$

Раздѣливъ обѣ части уравненія (1) на  $J$ , получимъ

$$1 - A \frac{\cos^2 \alpha}{J} + B \frac{\cos^2 \beta}{J} + C \frac{\cos^2 \gamma}{J} - 2D \frac{\cos \alpha \cos \beta}{J} - 2E \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{J} - 2F \frac{\cos \beta \cos \gamma}{J} = 0$$

откуда

$$1 - A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2D xy - 2Exx - 2Fxy = 0 \quad (2)$$

Уравненіе (2) представляетъ геометрическое мѣсто точекъ  $P$ . Это поверхность второго порядка, при томъ съ центромъ въ началѣ координатъ, такъ какъ моментъ инерціи относительно какой-либо оси вообще не нуль (слѣдовательно,  $\frac{1}{\sqrt{J}}$  не  $\infty$ ) то вообще говоря, ни одна изъ точекъ поверхности (2) не находится на бесконечности и, слѣдовательно, уравненіе (2) изображаетъ эллипсоидъ, только въ одномъ частномъ случаѣ, когда, пренебрегая поперечнымъ сѣченіемъ тѣла, мы рассматриваемъ его какъ прямолинейный отрѣзокъ (тонкая проволока), - уравненіе

(2) изображаетъ крутиль цилиндръ, ось котораго расположена вдоль по отрезку \*).

Эллипсоидъ (2) называется эллипсоидомъ инерціи тѣла въ точкѣ  $O$ .

Если мы главные оси эллипсоида инерціи примемъ за координатныя оси, тогда уравненіе эллипсоида инерціи будетъ:

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2 \quad \dots (2')$$

и, слѣдовательно, центробѣжныя моменты инерціи въ этомъ случаѣ равны нулю:

$$D = E = F = 0.$$

Главные оси эллипсоида инерціи называются *главными осями инерціи тѣла* и соответствующіе имъ моменты инерціи *главными моментами инерціи тѣла* - въ той точкѣ, съ которою совпадаетъ центръ эллипсоида инерціи; важное свойство главныхъ осей инерціи заключается именно въ томъ, что для нихъ центробѣжныя моменты инерціи равны нулю.

Эллипсоидъ инерціи, центръ котораго находится въ центръ тяжести тѣла, называется *центральной*.

Главные оси центрального эллипсоида инерціи называются *главными центральными осями инерціи тѣла*; а моменты инерціи относительно этихъ осей называются *главными центральными моментами инерціи тѣла*.

Если главные оси инерціи примемъ за оси координатъ, то моменты инерціи относительно какой угодно оси, составляющей углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  съ этими осями, будетъ:

$$I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma, \quad (3)$$

такимъ образомъ, моменты инерціи тѣла относительно какой-угодно оси легко опредѣляется, если извѣстны главные моменты инер-

\*) Крутиль цилиндръ мы получимъ вообще для всякой системы материальныхъ точекъ, расположенныхъ по одной прямой линіи.



ціи для одной изъ точекъ этой оси.

Если тѣло имѣетъ плоскость симметріи, проходящую черезъ рассматриваемую точку, то одна изъ главныхъ осей инерціи въ этой точкѣ будетъ перпендикулярна къ плоскости симметріи.

Въ самомъ дѣлѣ, примемъ плоскость симметріи за плоскость  $xy$ . Вслѣдствіе симметріи каждому элементу тѣла, имѣющему массу  $m$  и координаты  $x, y, z$ , соответствуетъ по другую сторону плоскости элементъ, имѣющій также массу  $m$  и координаты  $x, y, -z$ , вслѣдствіе различія знаковъ координаты  $z$ , имѣемъ.

$$C = \sum m x^2 = 0,$$

$$D = \sum m y^2 = 0,$$

и уравненіе эллипсоида инерціи будетъ:

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2 F xy = 1$$

Такъ какъ въ это уравненіе  $z$  не входитъ въ первой степени, то ось  $Oz$  будетъ главной осью эллипсоида, т.е., главной осью инерціи

*Примѣръ* Въ кругломъ однородномъ цилиндрѣ одна изъ плоскостей симметріи есть плоскость, перпендикулярная къ оси цилиндра въ ея серединѣ, значитъ ось цилиндра есть главная центральная ось инерціи

Затѣмъ, всякая плоскость, проходящая черезъ ось цилиндра, есть также плоскость симметріи, слѣдовательно, вторыя двѣ главныя центральныя оси инерціи суть любыя двѣ прямыя, перпендикулярныя къ оси цилиндра въ ея срединѣ и составляющія между собою прямой уголъ.

*Теорема* Главная центральная ось инерціи есть вмѣстѣ съ тѣмъ главная ось инерціи для всякой точки лежащей на направленіи этой оси

Пусть  $OZ$  (черт 91) главная центральная ось инерции, причём начало координат совпадает съ центромъ тяжести.

Докажемъ, что  $OZ$  есть въ то же время главная ось инерции для точки  $H$ , находящейся въ разстояніи  $z_0$  отъ  $O$ .

Для этого нужно показать, что для точки  $H$  центробѣжные моменты инерции  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{G}$  равны нулю.

Возьмемъ новую систему координатъ съ осями.  $H\xi \parallel OX$ ,  $H\eta \parallel OY$ ,  $H\zeta$  совпадаетъ съ  $OZ$ . Очевидно, новыя координаты какой-либо точки тѣла будутъ

$$\begin{aligned}\xi &= x, \\ \eta &= y, \\ \zeta &= z - z_0.\end{aligned}$$

Центробѣжные моменты инерции  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{G}$  для точки  $H$  представляются въ видѣ:

$$\mathcal{D} = \sum m \eta^2 = \sum m y^2 = \sum m y^2 - z_0^2 \sum m y = \dots \dots \dots *)$$

$$\mathcal{G} = \sum m \xi^2 = \sum m x^2 = \sum m x^2 - z_0^2 \sum m x \dots \dots \dots *)$$

Но

$$\sum m y = 0,$$

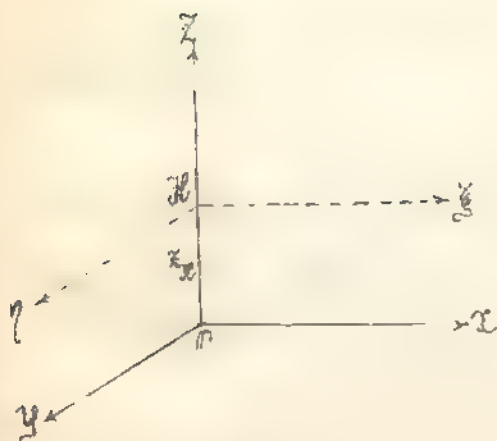
и

$$\sum m x = 0,$$

какъ центробѣжные моменты инерции для точки  $O$ ; точно также

$$\sum m x = 0 \quad \text{и} \quad \sum m y = 0,$$

такъ какъ начало координатъ



Чертежъ 91

\*) Изъ этихъ формулъ очевидно, что если главная ось инер-

въ центрѣ тяжести; - такимъ образомъ центробѣжные моменты  $\mathfrak{J}$  и  $\mathfrak{G}$  для точки  $\mathcal{H}$  равни нулю.

## § 2. Моменты инерціи относительно параллельныхъ осей.

Найдемъ связь между моментами инерціи тѣла относительно параллельныхъ осей, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ центръ тяжести.

Пусть центръ тяжести тѣла находится въ началѣ координатъ. Обозначимъ моментъ инерціи тѣла относительно оси  $OZ$  черезъ  $\mathfrak{J}_c$ .

Очевидно:

$$\mathfrak{J}_c = \sum m.(x^2 + y^2).$$

Найдемъ моментъ инерціи  $\mathfrak{J}_K$  относительно оси  $\mathcal{H}Z$ , параллельной  $OZ$  и пересѣкающей плоскость  $XOY$  въ точкѣ  $\mathcal{H}$ , координаты которой обозначимъ черезъ  $a$  и  $b$  (черт.92):

$$\mathfrak{J}_K = \sum m.(x - a)^2 + (y - b)^2 = \sum m.(x^2 + y^2) + \sum m.(a^2 + b^2) - 2\sum m.(ax + by);$$

но

$$\sum m.(ax + by) = a \sum mx + b \sum my = 0,$$

такъ какъ

$$\sum mx = 0 \text{ и } \sum my = 0,$$

ибо начало координатъ есть центръ тяжести; поэтому:

$$\mathfrak{J}_K = \sum m.(x^2 + y^2) + \sum m.(a^2 + b^2) = \mathfrak{J}_c + (a^2 + b^2) \sum m.$$

Очевидно,  $(a^2 + b^2)$  есть квадратъ разстоянія оси  $\mathcal{H}Z$  отъ оси  $OZ$ , которое мы обозначимъ черезъ  $\delta$ . Тогда

$$\mathfrak{J}_K = \mathfrak{J}_c + M.\delta^2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

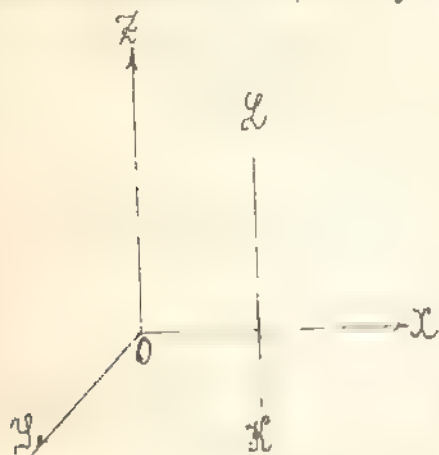
-----  
 цѣи для некоторой точки проходитъ черезъ центръ тяжести, то она дуреть главкою *ц е н т р а л ь н о ю* осью инерціи.

Такимъ образомъ, моментъ инерціи относительно какой-либо оси равенъ моменту инерціи относительно оси параллельной, проходящей черезъ центръ тяжести, плюсъ произведеніе массы тѣла на квадратъ кратчайшаго расстоянія между этими осями.

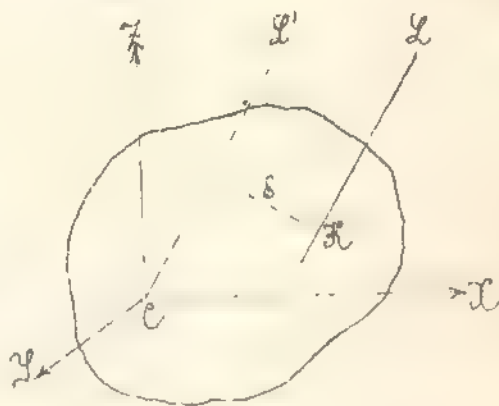
Такъ какъ это произведеніе величина всегда положительная, то отсюда слѣдуетъ, что центральный моментъ инерціи есть наименьшій изъ всѣхъ моментовъ инерціи относительно параллельныхъ осей.

Зная три главныхъ центральныхъ момента инерціи тѣла  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , мы легко можемъ опредѣлить моментъ инерціи тѣла относительно какой-угодно оси.

Пусть требуется найти моментъ инерціи  $J_x$  относительно оси  $XL$  (черт. 93), составляющей съ направленіями координатныхъ осей углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .



Чертежъ 92.



Чертежъ 93.

На основаніи формулы (3) моментъ инерціи относительно оси  $CL' \parallel XL$  будетъ:

$$J_x = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma$$

На основаніи формулы (4)

$$J_x = J_{x'} + M \delta^2 ;$$

слѣдовательно:

$$J_z = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma + M \delta^2.$$

Такимъ образомъ мы легко найдемъ моментъ инерціи тѣла относительно какой-угодно оси, если намъ будутъ извѣстны три главныхъ центральныхъ момента инерціи тѣла.

Съ помощью формулы (4) легко найти зависимость между моментами инерціи  $J_1$  и  $J_2$  относительно двухъ какихъ-угодно параллельныхъ осей, отстоящихъ отъ центра тяжести соотвѣтственно на разстояніяхъ  $\delta_1$  и  $\delta_2$ .

Если моментъ инерціи относительно оси, параллельной данной и проходящей черезъ центръ тяжести, обозначимъ черезъ  $J_c$ , тогда на основаніи формулы (4):

$$J_1 = J_c + M \delta_1^2,$$

$$J_2 = J_c + M \delta_2^2;$$

откуда

$$J_1 - J_2 = M(\delta_1^2 - \delta_2^2),$$

и

$$J_1 + J_2 = M(\delta_1^2 + \delta_2^2).$$

----- " -----

### Примѣчаніе

Вѣрѣдко говорятъ о моментахъ инерціи нѣкоторой площади; соотвѣствующія формулы получаемъ изъ предыдущихъ, полагая  $m = dS$ , гдѣ  $dS$  есть элементъ площади

Принимая плоскость данной площади  $S$  за плоскость  $YOY$ , имѣемъ для всѣхъ элементовъ площади  $x = 0$  моменты инерціи будутъ

$$A = \iint_S y^2 dx dy,$$

$$B = \iint_S x^2 dx dy,$$

$$C = A + B ;$$

произведения инерции

$$D = E = 0 ,$$

$$F = \iint_S x \cdot y \cdot dx \cdot dy ;$$

эллипсоид инерции для точки  $O$  въ пересѣченіи съ плоскостью  $xOy$  даетъ эллипсъ

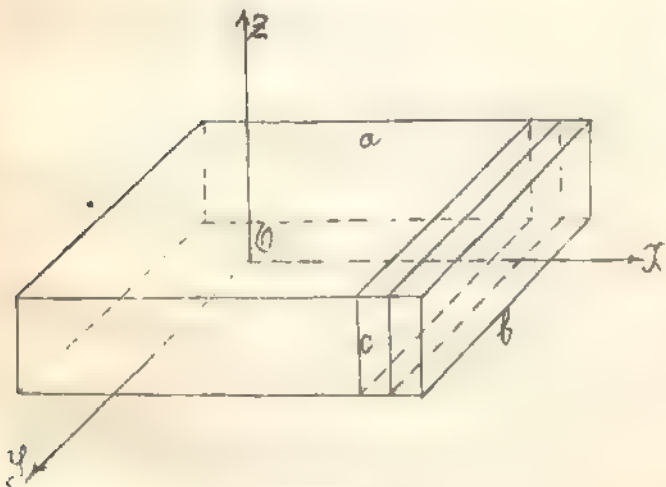
$$Ax^2 + By^2 - 2Fxy = 1 ,$$

который и называется "эллипсъ инерции" данной площади въ точкѣ  $O$

### § 3. Приемы опредѣленія моментовъ инерціи тѣлъ однородной плотности.

1) Найдѣмъ моменты инерціи прямого параллелепипеда отно-

сительно координатныхъ осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести и параллельныхъ ребрамъ  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (черт. 94).



Чертежъ 94.

Для этого, какъ мы знаемъ, нужно найти три суммы

$$\sum m x^2, \sum m y^2, \sum m z^2$$

или соответствующіе имъ интегралы

Чтобы найти  $\sum m x^2$ , дѣлимъ параллелепипедъ плоскостями, параллельными плоскости  $Oyz$ , на безконечно малые паралле-



пипеды; возьмемъ слой бесконечно малой толщины  $dx$

Масса этого слоя будетъ:

$$m = k \cdot b \cdot c \cdot dx,$$

гдѣ  $k$  — плотность тѣла, а такъ какъ для всѣхъ элементовъ выдѣленнаго слоя  $x$  одно и то же, то моментъ инерціи слоя будетъ:  $k \cdot b \cdot c \cdot x^2 dx$ , и, слѣдовательно:

$$\sum m x^2 = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} k b c x^2 dx = 2 k b c \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 dx = 2 k b c \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{k b c a^3}{12}.$$

Но  $k \cdot b \cdot c \cdot a$  есть масса всего параллелепипеда, которую мы обозначимъ черезъ  $M$ ; слѣдовательно

$$\sum m x^2 = \frac{M a^2}{12};$$

Аналогичнымъ способомъ найдемъ:

$$\sum m y^2 = \frac{M b^2}{12},$$

и

$$\sum m z^2 = \frac{M c^2}{12}.$$

Теперь можемъ написать интересующіе насъ моменты инерціи:

$$A = \sum m (y^2 + z^2) = \frac{M (b^2 + c^2)}{12},$$

$$B = \sum m (x^2 + z^2) = \frac{M (a^2 + c^2)}{12},$$

$$C = \sum m (x^2 + y^2) = \frac{M (a^2 + b^2)}{12}.$$

2) Найдемъ моменты инерціи круглаго цилиндра, радіуса  $R$  и высоты  $h$ , относительно координатныхъ осей, проходящихъ черезъ центръ тяжести (черт. 95).

Найдемъ сначала моментъ инерціи относительно оси цилиндра



Черт. 95.

$$I = \sum m r^2$$

Раздѣлимъ цилиндръ на безконечно тонкіе цилиндрическіе слои; возьмемъ слой безконечно малой толщины  $dr$ , внутренній радіусъ котораго  $r$ .

Объемъ такого слоя будетъ равенъ:

$$[\pi(r+dr)^2 - \pi r^2]h = [2r dr (dr)^2] \pi h$$

Пренебрегая безконечно малую величиной второго порядка  $(dr)^2 \pi h$ , получимъ объемъ слоя:

$$2\pi h r dr,$$

откуда масса его:

$$2k\pi h r dr$$

Такъ какъ всѣ элементы слоя находятся въ одномъ и томъ же разстояніи  $r$  отъ оси  $OZ$ , то моментъ инерціи его будетъ.

$$2\pi k h r^3 dr$$

Такимъ образомъ:

$$I = \sum m r^2 = \int_0^R 2\pi k h r^3 dr = 2\pi k h \int_0^R r^3 dr = 2\pi k h \frac{R^4}{4}.$$

Обозначая черезъ  $M$  массу цилиндра ( $M = k\pi R^2 h$ ), получимъ:

$$I = \frac{1}{2} M R^2.$$

Найдемъ моментъ инерціи цилиндра относительно двухъ другихъ главныхъ осей, для чего нужно найти суммы  $\sum m x^2$ ,  $\sum m y^2$ ,  $\sum m z^2$ .

Очевидно:

$$\sum m (y^2 + z^2) = \sum m (x^2 + z^2),$$

откуда:

$$\sum m x^2 - \sum m y^2$$

Такимъ образомъ, найденный нами моментъ инерціи

$$C \cdot \sum m (x^2 + y^2) = 2 \sum m x^2 - 2 \sum m y^2;$$

откуда:

$$\sum m x^2 - \sum m y^2 = \frac{C}{2} = \frac{1}{4} \mathcal{A} R^2.$$

Найдемъ сумму

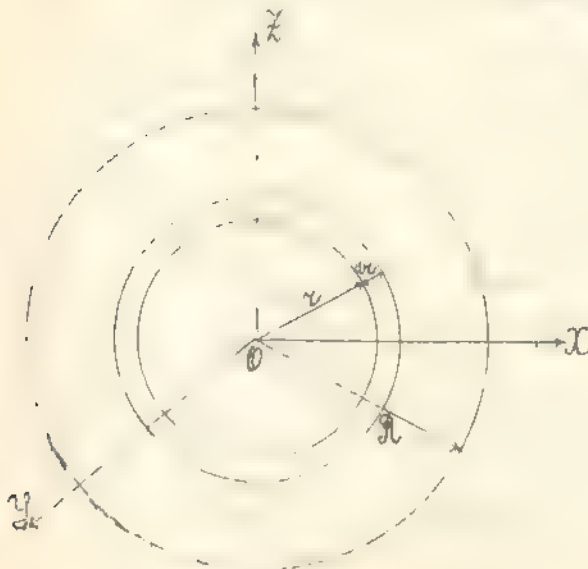
$$\sum m r^2$$

Раздѣлимъ цилиндръ на безконечно тонкіе слои плоскостями, параллельными плоскости  $XOY$ ; возьмемъ слой безконечно малой толщины  $dz$ . Объемъ элементарнаго слоя будетъ:  $\pi R^2 dz$ , масса  $k \pi R^2 dz$ ; а моментъ инерціи  $k \pi R^2 z^2 dz$ ; такъ какъ для всѣхъ элементовъ слоя  $z$  одно и то же. Такимъ образомъ:

$$\sum m r^2 = 2 \int_0^{\frac{h}{2}} k \pi R^2 z^2 dz = 2 k \pi R^2 \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^{\frac{h}{2}} = 2 k \pi R^2 \frac{h^3}{24} = \frac{\mathcal{A} h^2}{12};$$

слѣдовательно:

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \frac{\mathcal{A} h}{4} \left( R^2 + \frac{h^2}{3} \right).$$



3) Найдемъ моментъ инерціи шара, радіуса  $R$ , относительно какой-либо оси, проходящей черезъ центръ шара.

Раздѣлимъ шаръ на равными поверхностями на безконечно тонкіе сферическіе слои. Возьмемъ слой безконечно малой толщины  $dr$ , вну-

тренній радіусъ котораго равенъ  $r$  (черт. 96).

Объемъ такого слоя будетъ:

$$\frac{4}{3} \pi (r+dr)^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} [r^3 + 3r^2 dr + 3r(dr)^2 + (dr)^3 - r^3] \pi$$

Пренебрегая безконечно малыми величинами второго и третьяго порядка, получимъ, что объемъ слоя равенъ  $4\pi r^2 dr$ , масса его  $k 4\pi r^2 dr$ , а следовательно,  $\sum m r^2$  для слоя будетъ равна

$$k 4\pi r^4 dr.$$

Для всего шара сумма  $\sum m r^2$  выразится тогда такъ:

$$\begin{aligned} \sum m r^2 &= \int_0^R 4\pi k r^4 dr = \\ &= 4\pi k \frac{R^5}{5} = \frac{2}{5} M R^2, \end{aligned}$$

гдѣ  $M = k \frac{4}{3} \pi R^3$  — масса шара.

Но

$$\sum m x^2 = \sum m (x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$= 3 \sum m x^2 = 3 \sum m y^2 = 3 \sum m z^2;$$

следовательно:

$$\sum m x^2 = \sum m y^2 = \sum m z^2 = \frac{1}{3} M R^2.$$

Такимъ образомъ, находимъ, что для шара моменты инерціи будутъ:

$$A = B = C = \frac{2}{5} M R^2.$$

## Г Л А В А IX.

### ДВИЖЕНІЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА.

Положеніе твердаго тѣла опредѣляется, какъ извѣстно, изъ Кинематики, вообще шестью координатами; поэтому для опредѣленія движенія твердаго тѣла при дѣйствіи данныхъ силъ достаточно имѣть шесть дифференціальныхъ уравненій.

Законъ движенія центра инерціи и законъ моментовъ дадутъ эти уравненія.

Пусть тѣло свободно. Обозначимъ: черезъ  $M$  массу тѣла;  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  - координаты его центра тяжести;  $L_x^{(c)}$ ,  $L_y^{(c)}$ ,  $L_z^{(c)}$  моменты количества движенія тѣла относительно осей, проведенныхъ черезъ центръ тяжести параллельно неподвижнымъ координатнымъ осямъ;  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$  - проекціи главнаго вектора задаваемыхъ силъ, къ тѣлу приложенныхъ, такъ что:

$$V_x = \sum X_i,$$

$$V_y = \sum Y_i,$$

$$V_z = \sum Z_i;$$

$L_x^{(c)}$ ,  $L_y^{(c)}$ ,  $L_z^{(c)}$  - главные моменты этихъ силъ относительно осей, проведенныхъ черезъ центръ тяжести параллельно неподвижнымъ координатнымъ осямъ. Дифференціальныя уравненія движенія свободного твердаго тѣла представляются тогда въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} x'_c &= V_x, \\ \frac{d}{dt} y'_c &= V_y, \\ \frac{d}{dt} z'_c &= V_z. \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

$$\frac{d}{dt} L_x^{(0)} = L_x, \quad \frac{d}{dt} L_y^{(0)} = L_y, \quad \frac{d}{dt} L_z^{(0)} = L_z \quad (II)$$

такъ какъ главный векторъ и главный моментъ реакціи связей, обусловливающихъ неизмѣняемость системы (твердость тѣла), какъ силъ внутреннихъ, равны нулю.

Если тѣло несвободно, то въ правая части уравненій (I) нужно ввести еще проекціи реакцій опоръ, а въ правая части уравненій (II) моменты этихъ реакцій относительно осей, проведенныхъ, какъ выше указано, черезъ центръ тяжести.

Въ случаѣ несвободнаго тѣла, имѣющаго неподвижно закрѣпленную точку, удобнѣе брать, вмѣсто трехъ уравненій (II), три уравненія (III), содержащія моменты относительно координатныхъ осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , начало которыхъ помѣщено въ неподвижной точкѣ:

$$\frac{dL_x}{dt} = L_x, \quad \frac{dL_y}{dt} = L_y, \quad \frac{dL_z}{dt} = L_z \quad (III)$$

гдѣ  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ , обозначаютъ моменты количества движенія тѣла относительно координатныхъ осей, а  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  - сумми моменты относительно тѣхъ же осей данныхъ силъ и реакцій опоръ.

Когда тѣло несвободно, тогда число независимыхъ координатъ \*) менѣе шести, но зато являются неизвѣстныя реакціи.

---

\*) Это число называется числомъ степеней свободы тѣла, наприкладъ, тѣло, одна точка котораго закрѣплена неподвижно, имѣетъ три степени свободы.



### § 1. Поступательное движение твердаго тѣла.

При поступательномъ движеніи тѣла всѣ точки его движутся по тождественнымъ кривымъ съ равными и параллельными скоростями; слѣдовательно, всѣ точки движутся такъ, какъ движется центръ тяжести. Такимъ образомъ тѣло не совершаетъ относительнаго движенія по отношенію къ центру тяжести; вслѣдствіе этого моментъ количества движенія относительно центра тяжести будетъ равенъ нулю:

$$L^{(c)} = 0 ,$$

а слѣдовательно:

$$L_x^{(c)} = 0 ,$$

$$L_y^{(c)} = 0 ,$$

$$L_z^{(c)} = 0 .$$

Это же можетъ быть только тогда, когда главный моментъ всѣхъ силъ относительно центра тяжести равенъ нулю, т е когда  $L^{(c)} = 0$ , или

$$L_x^{(c)} = 0, L_y^{(c)} = 0, L_z^{(c)} = 0 .$$

Такимъ образомъ, для того, чтобы твердое тѣло совершало поступательное движеніе, необходимо, чтобы главный моментъ всѣхъ силъ относительно центра тяжести былъ равенъ нулю, т.е. чтобы всѣ силы, какъ извѣстно изъ курса Статики, приводились къ одной равнодѣйствующей, приложенной къ центру тяжести тѣла.

При дѣйствіи такихъ силъ тѣло будетъ двигаться поступательно, если въ начальный моментъ скорости всѣхъ точекъ равны и параллельны, въ частномъ случаѣ, если тѣло было въ покоѣ.

примѣръ представляетъ движеніе твердаго тѣла при дѣйствіи

сила тяжести, если только въ начальный моментъ ему сообщено поступательное движеніе или оно находилось въ покой.

## § 2. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси.

Ось вращенія примемъ за ось  $OZ$  (черт. 97). Въ данномъ случаѣ тѣло имѣетъ одну степень свободы, и положеніе его вполне опредѣляется угломъ поворота  $\varphi$ .

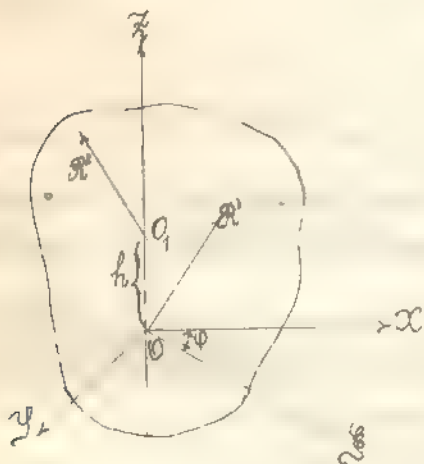
Вслѣдствіе этого для опредѣленія движенія тѣла достаточно имѣть одно уравненіе, содержащее одну неизвѣстную функцію времени, именно уголъ  $\varphi$ .

Такое уравненіе, какъ уже указано на стр. 284-285 даетъ намъ законъ моментовъ въ при-  
мѣненіи къ оси  $OZ$ :

$$\frac{dL_z}{dt} = L_z.$$

Какъ мы знаемъ,  $L_z = C\varphi'$  гдѣ  $C$  - моментъ инерціи тѣла относительно оси  $OZ$ ; поэтому

$$\frac{dL_z}{dt} = C\varphi''.$$



Чертежъ 97.

Если радиусъ инерціи тѣла относительно оси  $OZ$  обозначимъ черезъ  $\rho$ , то

$$C = M\rho^2,$$

и мы можемъ написать:

$$M\rho^2\varphi'' = L_z.$$

Здѣсь  $L_z$  - главный моментъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, задаваемыхъ и реакцій, относительно оси вращенія.

Тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси, можно разсматривать, какъ имѣющее двѣ закрѣпленныя точки  $O$  и  $O_1$ . Реакцію

въ точкѣ  $O$  обозначимъ черезъ  $\bar{H}$ , а въ точкѣ  $O'$  черезъ  $\bar{H}'$

Моменты реакцій относительно оси  $Ox$ , очевидно, равни нулю, значить:

$$L_z = \sum (x_i Y_i + y_i X_i),$$

если обозначимъ черезъ  $X_i, Y_i, Z_i$  проекціи заданныхъ силъ, приложенныхъ къ тѣлу, а черезъ  $x_i, y_i, z_i$  координаты ихъ точекъ приложенія.

Каковы бы ни были данныя силы,  $L_z$  всегда можно выразить въ функціи отъ  $t, \varphi, \varphi'$  \*), ибо, какъ извѣстно уже изъ кинематики, координаты  $x_i, y_i, (z_i = \text{constants})$  всѣхъ точекъ тѣла выражаются черезъ уголъ  $\varphi$ .

$$x_i = r_i \cos(\varphi + \theta_i),$$

$$y_i = r_i \sin(\varphi + \theta_i),$$

гдѣ  $r_i$  и  $\theta_i$  величины постоянныя, а данныя силы въ самомъ общемъ случаѣ зависятъ отъ времени, положеній и скоростей точекъ тѣла.

Такимъ образомъ, законъ моментовъ относительно оси вращения тѣла даетъ намъ слѣдующее уравненіе:

$$M \varphi^2 = L_z(t, \varphi, \varphi') \quad (1)$$

Мы получили дифференціальное уравненіе второго порядка того же типа, который имѣли въ случаѣ прямолинейнаго движенія точки.

Къ уравненію (1) применимо все то изслѣдованіе дифференціального уравненія, которое изложено въ главѣ II "Кинетики точки".

Интегрируя уравненіе (1), мы найдемъ уголъ  $\varphi$ , какъ функ-

\*) Угловая скорость  $\varphi'$  войдетъ въ выраженіе  $L_z$  только въ томъ случаѣ, когда при разсмотрѣніи движенія принимается во вниманіе вращеніе среды.

цію отъ времени  $t$ , содержащую двѣ постоянныхъ произвольныхъ; эти постоянныя опредѣляются по начальнымъ даннымъ, т. е. по даннымъ величинамъ угла  $\varphi$  и угловой скорости тѣла:  $\varphi_0$  и  $(\varphi')_0$  въ одинъ какой-либо опредѣленный моментъ времени  $t_0$ ; обыкновенно полагаютъ  $t_0 = 0$ .

Отвѣтимъ частный случай, когда главный моментъ всѣхъ силъ относительно оси  $OZ$  равенъ нулю, т. е. когда

$$L_z = 0.$$

Въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

откуда:

$$\varphi' = \text{const.}$$

и, слѣдовательно, тѣло вращается равномерно съ тою угловою скоростью, которую оно имѣло въ начальный моментъ.

Если на тѣло дѣйствуетъ только сила тяжести, то  $L_z = 0$ , когда ось  $OZ$  или проходитъ черезъ центръ тяжести тѣла, или вертикальна. Такимъ образомъ, тяжелое твердое тѣло равномерно вращается вокругъ оси только въ двухъ случаяхъ: 1) когда ось проходитъ черезъ центръ тяжести и 2) когда ось вертикальна.

#### Физическій маятникъ.

Разсмотримъ вращеніе (колебаніе) тяжелаго твердаго тѣла вокругъ горизонтальной оси, не проходящей черезъ центръ тяжести.

Ось вращенія  $ZZ'$  пусть будетъ перпендикулярна къ плоскости чертежа; она называется "осью pivots" маятника. Плоскость  $UQ$  выберемъ такъ (черт. 98), чтобы она заключала въ себѣ центръ тяжести  $G$  тѣла; точка  $O$  называется "центромъ



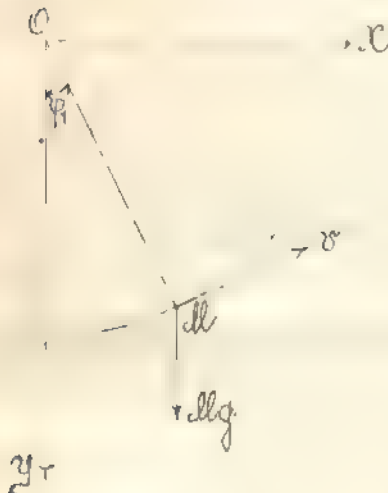
и, слѣдовательно:

$$m l \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mg \sin \varphi,$$

откуда:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Сравнивая уравненіе движенія физическаго маятника съ уравненіемъ движенія математическаго маятника, замѣчаемъ, что при  $l = \frac{g}{k}$  уголъ  $\varphi$  измѣняется при движеніи обоихъ маятниковъ одинаково, если только уголъ начальнаго отклоненія и начальная угловая скорость будутъ одинаковы.



Чертежъ 99.

Такимъ образомъ, при движеніи физическаго маятника уголъ  $\varphi$  измѣняется такъ же, какъ и при движеніи математическаго маятника, длина котораго равна квадрату радиуса инерціи физическаго маятника относительно оси привѣса, разделенному на разстояніе центра тяжести маятника отъ этой оси; при этомъ предполагается, что въ начальный моментъ отклоненіе и угловая скорость для обоихъ маятниковъ одинаковы.

ковъ одинаковы.

Формула для продолжительности одного размаха, введенная въ § 4 гл. VII "Кинетики точки", имѣетъ мѣсто и въ настоящемъ случаѣ.

Длина:  $l = \frac{g}{k}$  называется приведенною длиною физическаго маятника, или длиною математическаго маятника, эквивалентнаго данному физическому.

Если отъ центра привѣса O отложимъ по прямой OQ длину  $OQ' = l = \frac{g}{k}$ , то точка Q' будетъ находиться по другую сторону



отъ точки  $O$  .

Въ самомъ дѣлѣ, моментъ инерціи тѣла относительно оси  $OO'$  будетъ:

$$J = J_c + M.h^2 ,$$

гдѣ  $J_c$  - моментъ инерціи относительно оси, проведенной черезъ центръ тяжести, параллельно оси привѣса.

Обозначая черезъ  $\varphi_c$  соответствующій радіусъ инерціи, получимъ:

$$M.\varphi^2 = M.\varphi_c^2 + M.h^2 ;$$

откуда:

$$\varphi^2 = \varphi_c^2 + h^2$$

Такимъ образомъ:

$$OO' = \frac{\varphi_c^2 + h^2}{h} = h + \frac{\varphi_c^2}{h} ,$$

т.е., приведенная длина физическаго маятника равна разстоянію  $OO'$  , сложенному съ нѣкоторою положительною величиною.

Точка  $O'$  , называемая центромъ качанія, движется совершенно также, какъ если бы она была тяжелой точкою математическаго маятника  $OO'$  .

Прямая  $AB$  , параллельная оси привѣса и проходящая черезъ точку  $O'$  , называется осью качаній.

Очевидно.

$$O'g = \frac{\varphi_c^2}{h} ,$$

слѣдовательно:

$$Og.O'g = \varphi_c^2 .$$

Такимъ образомъ, произведеніе разстояній оси привѣса и оси качаній (или центра привѣса и центра качаній) отъ центра тяжести маятника равно квадрату глеча инерціи для оси, проведенной черезъ центръ тяжести параллельно оси привѣса.

Если мы перевернемъ нашъ маятникъ такъ, что прямая  $AB$  сдѣлается осью привѣса, тогда разстояніе ея отъ центра тяже-

сти  $\vartheta$  будетъ, очевидно,  $\frac{\vartheta_c^2}{h}$ , значить, расстояние соответствующей оси качаній отъ  $\vartheta$ , согласно сказанному, должно быть равно  $\vartheta_c^1 \cdot \frac{\vartheta_c^2}{h} \cdot h$ , т.е. соответствующая ось качаній будетъ ось  $ZZ'$ .

Такимъ образомъ, ось качаній и ось привѣса суть взаимныя оси.

Указанное свойство осей привѣса и качаній даетъ возможность точно опредѣлить приведенную длину давнаго физическаго маятника: маятникъ имѣетъ двѣ призмы  $A$  и  $B$ , изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одну можно передвигать; эти призмы устанавливаются на *Черт. 100.* такомъ разстояніи другъ отъ друга, чтобы время колебанія около ребра  $A$  и около ребра  $B$  было одно и то же, тогда  $AB = l$ .

Маятникъ съ двумя призмами  $A$  и  $B$  называется *оборотнымъ маятникомъ*; — онъ служитъ, между прочимъ, для опредѣленія величины ускоренія силы тяжести въ данномъ мѣстѣ земной поверхности: для продолжительности  $T$  одного размаха маятника при весьма малыхъ углахъ склоненій имѣетъ извѣстную формулу:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

откуда:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$$

### § 3. Давленіе вращающагося тѣла на ось.

Въ предыдущемъ параграфѣ для опредѣленія вращенія тѣла вокругъ оси при дѣйствіи какихъ-либо данныхъ силъ мы воспользовались лишь однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ, именно тѣмъ, которое даетъ законъ моментовъ въ приложеніи къ оси  $OZ$ .

Остальныя пять дифференціальныхъ уравненій (три уравненія движенія центра тяжести и два уравненія моментовъ) послужатъ намъ для опредѣленія реакцій  $R' (X, Y, Z')$  и  $R'' (X'', Y'', Z'')$  (черт. 97), а слѣдовательно и оселеній вращающагося тѣла на ось, — въ томъ предположеніи, что уголъ поворота  $\varphi$  уже опредѣленъ, какъ функція времени.

Уравненія движенія центра тяжести будутъ:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{x}_c &= \sum X_i + X' + X'', \\ M \ddot{y}_c &= \sum Y_i + Y' + Y'', \\ M \ddot{z}_c &= \sum Z_i + Z' + Z'' = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(ибо  $z = \text{const}$ ), а уравненія моментовъ относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  представятся въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl_x}{dt} &= \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) + h Y'', \\ \frac{dl_y}{dt} &= \sum (z_i X_i - x_i Z_i) + h X'', \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(моменты реакцій  $R'$  относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  равны нулю)

Такъ какъ вообще

$$\begin{aligned} l_x &= \sum m_i (y_i z_i' - z_i y_i'), \\ l_y &= \sum m_i (z_i x_i' - x_i z_i'), \end{aligned}$$

а у насъ  $z_i = \text{const}$ , то, слѣдовательно, въ нашемъ случаѣ:

$$\begin{aligned} l_x &= - \sum m_i z_i y_i', \\ l_y &= \sum m_i z_i x_i'. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, уравненія (3) мы можемъ написать въ видѣ:

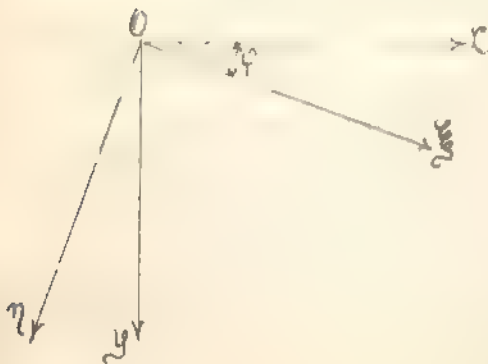
$$\left. \begin{aligned} -\sum m_i x_i y_i' - \sum (y_i z_i - x_i y_i) - h y'' \\ \sum m_i x_i x_i'' - \sum (x_i x_i - x_i z_i) + h x'' \end{aligned} \right\} \dots \quad (3')$$

Первые два изъ уравненій (2) и уравненія (3) дадутъ намъ четыре проекціи  $X', Y', X'', Y''$ , третье же изъ уравненій (2) дастъ намъ сумму  $Z' + Z''$ . Отдѣльно проекцій  $Z$  и  $Z'$  мы не найдемъ, такъ какъ у насъ всего пять уравненій, а неизвѣстныхъ проекцій шесть.

Примемъ плоскость, которая проходитъ черезъ  $OZ$  и образуетъ съ  $OX$  уголъ  $\varphi$ , за плоскость  $\xi O \zeta$  (черт. 101). Тогда, очевидно:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \xi_i \cos \varphi - \eta_i \sin \varphi, \\ y_i &= \xi_i \sin \varphi + \eta_i \cos \varphi, \\ z_i &= \zeta_i. \end{aligned} \right\} \dots \quad (4)$$

Зная положеніе центра тяжести тѣла, т.е. координаты  $\xi_c$ ,  $\eta_c$ ,  $\zeta_c$  мы по формуламъ (4) найдемъ  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$ :



$$\begin{aligned} x_c &= \xi_c \cos \varphi - \eta_c \sin \varphi, \\ y_c &= \xi_c \sin \varphi + \eta_c \cos \varphi, \\ z_c &= \zeta_c. \end{aligned}$$

Проекціи ускоренія какой-либо точки  $M_i$  какъ извѣстно изъ кинематики, выражаются формулами:

$$\begin{aligned} x_i' &= -y_i \varphi'' - x_i \varphi'^2, \\ y_i' &= x_i \varphi'' - y_i \varphi'^2. \end{aligned}$$

Примѣнявши эти формулы къ центру тяжести, мы послѣ подстановки въ уравненія (2), получимъ:

$$\left. \begin{aligned} M(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi' - M(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi'^2 &= \sum X_i + X' + X'', \\ M(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) \varphi' - M(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) \varphi'^2 &= \sum Y_i + Y' + Y'', \\ 0 &= \sum Z_i + Z' + Z''. \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Подставляя затѣмъ вышеуказанныя выраженія  $x_i'$  и  $y_i''$  въ лѣвыя части уравненій (3'), получимъ:

$$\begin{aligned} -\sum m_i x_i y_i'' &= -\varphi' \sum m_i x_i x_i + \varphi'^2 \sum m_i x_i y_i = \\ &= -\varphi' \{ \cos \varphi \sum m_i \tilde{x}_i \xi - \sin \varphi \sum m_i \tilde{x}_i \eta \} + \varphi'^2 \{ \sin \varphi \sum m_i \tilde{x}_i \xi + \cos \varphi \sum m_i \tilde{x}_i \eta \}; \\ \sum m_i x_i x_i'' &= \varphi' \sum m_i x_i y_i - \varphi'^2 \sum m_i x_i x_i = \\ &= -\varphi' \{ \sin \varphi \sum m_i \tilde{x}_i \xi + \cos \varphi \sum m_i \tilde{x}_i \eta \} - \varphi'^2 \{ \cos \varphi \sum m_i \tilde{x}_i \xi - \sin \varphi \sum m_i \tilde{x}_i \eta \}. \end{aligned}$$

Замѣчая, что суммы, стоящія въ правыхъ частяхъ этихъ уравненій представляютъ центробѣжные моменты тѣла и вводя принятыя нами для нихъ обозначенія, мы можемъ написать уравненія (3') въ видѣ:

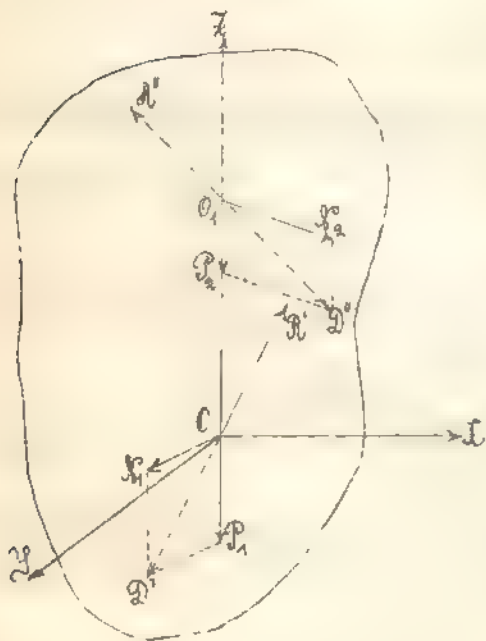
$$\left. \begin{aligned} -\varphi'(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) + \varphi'^2(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) &= \sum (y_i Z_i - x_i Y_i) - h Y'', \\ -\varphi'(\xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi) - \varphi'^2(\xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi) &= \sum (x_i X_i - y_i Z_i) + h X''. \end{aligned} \right\} \quad (3'')$$

Зная вращеніе тѣла, т.е. уголъ поворота  $\varphi$ , какъ функцію времени, зная затѣмъ положеніе центра тяжести даннаго тѣла, его центробѣжные моменты инерціи  $\mathcal{I}$  и  $\mathcal{G}$ , мы можемъ опредѣлить при всякихъ данныхъ силахъ давленія на ось: изъ уравненія (3'') находимъ  $X$  и  $Y'$ , а подставляя полученные отсюда

значенія въ уравненія (2), найдемъ  $X''$  и  $Y''$ ; кроме того, имѣемъ:

$$Z' + Z'' = -\sum Z_i,$$

перемѣнивши знаки у полученныхъ значеній, мы найдемъ соотвѣтствующія проекція давленія  $\mathcal{D}'$  и  $\mathcal{D}''$  (черт. 102).



Чертежъ 102.

Разложимъ каждое изъ давленій  $\mathcal{D}'$  и  $\mathcal{D}''$  на двѣ составляющія, изъ которыхъ одна направлена вдоль оси, а другая по перпендикуляру къ оси. Для давленій вдоль оси  $\mathcal{D}'_1$  и  $\mathcal{D}'_2$  мы находимъ по предыдущему только ихъ равнодѣйствующую, которая будетъ равна суммѣ проекцій данныхъ силъ на ось вращенія  $OZ$ ; давленія же, перпендикулярныя къ оси,  $\mathcal{K}'$  и  $\mathcal{K}''$  опредѣляются вполне каждое отдѣльно;  $\mathcal{K}'$  и  $\mathcal{K}''$  называются боковыми давленіями на ось.

**Примѣръ.** Опредѣлить давленіе на ось вращающагося твердаго тѣла, равномерно вращающагося вокругъ вертикальной оси.

Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ  $\varphi'' = 0$  и проекція силы тяжести на оси  $OX$  и  $OY$  также нули, то уравненія (2') представляются въ видѣ:

$$-M(\xi_c \cos \varphi - \eta_c \sin \varphi) \varphi^2 = X' + X'',$$



$$-h(\xi \sin \varphi + \eta_c \cos \varphi) \varphi'^2 = \dot{Y}' + Y'',$$

$$0 = -h g + Z' + Z''.$$

предполагая, что ось  $OZ$  направлена по вертикали вверх.

Далѣе, при  $\varphi' = 0$ , уравненія (3'') примутъ видъ:

$$(C \sin \varphi + D \cos \varphi) \varphi'^2 = -\eta_c h g - h Y'' = -h g (\xi \sin \varphi + \eta_c \cos \varphi) - h Y'',$$

$$-(C \cos \varphi - D \sin \varphi) \varphi'^2 = \pm_c h g + h X'' = h g (\xi \cos \varphi - \eta_c \sin \varphi) + h X''.$$

Изъ этихъ уравненій мы и опредѣлимъ проекціи реакцій:  $X'$ ,  $Y'$ ,  $X''$ ,  $Y''$  и слѣдовательно, и боковыя давленія на ось; равнодѣйствующая давленій вдоль оси направлена внизъ и равна вѣсу тѣла.

Если ось вращенія проходитъ черезъ центръ тяжести, тогда  $\xi_c = 0$ ,  $\eta_c = 0$ , и мы имѣемъ:

$$X' = -X'',$$

$$Y' = -Y'',$$

$$Z' + Z'' = h g,$$

$$(C \sin \varphi - D \cos \varphi) \varphi'^2 = -h Y'',$$

$$-(C \cos \varphi + D \sin \varphi) \varphi'^2 = h X''.$$

Въ этомъ случаѣ мы видимъ, что боковое давленіе на ось пропорціонально квадрату угловой скорости: — какъ въ точкѣ  $O$ , такъ и въ точкѣ  $C_1$ , боковое давленіе равно:

$$\frac{\sqrt{D^2 + C^2}}{h} \varphi'^2$$

§ 4. Свойства главных осей инерции вращающегося тела.

Рассмотрим тѣ случай, когда вращающееся тѣло не оказыва-  
етъ бокового давленія на ось вращенія.

При этомъ будемъ предполагать, что силы совсѣмъ не прило-  
жены къ тѣлу, или онѣ приводятся къ одной силѣ, параллельной  
оси, или къ парѣ силъ, плоскость которой перпендикулярна къ  
оси вращенія.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ проекціи данныхъ силъ на оси  $Ox$   
и  $Oy$  и главные моменты ихъ относительно этихъ осей, очевид-  
но, равны нулю:

$$\sum X_i = 0, \sum Y_i = 0,$$

$$\sum (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0,$$

$$\sum (z_i X_i - x_i Z_i) = 0.$$



Уравненія (2) и (3<sup>а</sup>) въ этихъ случаяхъ примутъ видъ урав-  
неній (4) и (5):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M} x_c'' &= X' + X'', \\ \mathcal{M} y_c'' &= Y' + Y'', \\ \mathcal{M} z_c'' &= Z' + Z'' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} &-(\mathcal{E} \cos \varphi - \mathcal{D} \sin \varphi) \cdot \varphi'' + (\mathcal{E} \sin \varphi + \mathcal{D} \cos \varphi) \cdot \varphi'^2 = -h Y'', \\ &-(\mathcal{E} \sin \varphi + \mathcal{D} \cos \varphi) \cdot \varphi' - (\mathcal{E} \cos \varphi - \mathcal{D} \sin \varphi) \cdot \varphi'^2 = h X'', \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

Найдемъ условіе, необходимое и достаточное для того, что-  
бы боковое давленіе на ось было равно нулю, т. е., чтобы:

$$X' = 0, Y' = 0, X'' = 0, Y'' = 0.$$

Изъ уравненій (4) слѣдуетъ, что для этого необходимо, чтобы:

$$x_c' = 0, \quad y_c'' = 0,$$

т.е., чтобы ускореніе центра тяжести было равно нулю; но во вращающемся тѣлѣ только точки, лежація на оси вращенія, имѣютъ ускореніе, равное нулю, значитъ необходимо, чтобы ось вращенія проходила черезъ центръ тяжести.

Изъ уравненій (5) слѣдуетъ условіе, необходимое для того, чтобы  $X'' = 0$  и  $Y'' = 0$  :

$$-(G \cos \varphi - D \sin \varphi) \varphi'' + (G \sin \varphi + D \cos \varphi) \varphi'^2 = 0,$$

$$-(G \sin \varphi + D \cos \varphi) \varphi'' - (G \cos \varphi - D \sin \varphi) \varphi'^2 = 0.$$

Исключая изъ этихъ двухъ уравненій угловое ускореніе, находимъ условіе:

$$[(G \cos \varphi - D \sin \varphi)^2 + (G \sin \varphi + D \cos \varphi)^2] \varphi'^2 = 0$$

или

$$(G^2 + D^2) \varphi'^2 = 0.$$

Если тѣло вращается, то угловая скорость отлична отъ нуля, значитъ, для того, чтобы боковое давленіе на ось равнялось нулю, необходимо, чтобы:

$$G^2 + D^2 = 0$$

и это тогда, когда

$$G = 0 \text{ и } D = 0$$

Мы такимъ образомъ нашли, что для того, чтобы тѣло не оказывало бокового давленія на ось, необходимо, чтобы ось вращенія проходила черезъ центръ тяжести и чтобы центробѣжные моменты относительно этихъ осей были равны нулю.

Эти условія выйдутъ съ тѣмъ достаточны, ибо, если центръ тяжести находится на оси вращенія ( $x_c = 0, y_c = 0$ ), тогда:

$$\begin{aligned} X' + X'' &= 0, \\ Y' + Y'' &= 0; \end{aligned}$$

а если  $\mathcal{D} = 0$  и  $\mathcal{C} = 0$ , то  $X'' = 0$  и  $Y'' = 0$ , а следовательно и  $X' = 0$  и  $Y' = 0$ .

Когда центробѣжные моменты инерціи  $\mathcal{D}$  и  $\mathcal{C}$  равны нулю, тогда въ уравненіи эллипсоида инерціи исключають члены, содержащіе  $X$  въ первой степени, значить тогда ось  $OX$  направлена по главной оси эллипсоида инерціи; но если ось  $OX$  есть главная ось инерціи для точки  $O$ , то она есть главная ось инерціи и для центра тяжести, ибо центръ тяжести находится на оси  $OX$  (см. главу VIII).

Такимъ образомъ, изъ всего сказаннаго мы можемъ одѣлать слѣдующее заключеніе: твердое тѣло не оказываетъ боковыхъ давленій на ось, при вышеуказанныхъ предположеніяхъ относительно заданныхъ силъ, тогда и только тогда, когда ось вращенія есть главная центральная ось инерціи тѣла.

Если тѣло не оказываетъ бокового давленія на ось, значить нѣтъ надобности закрѣплять эту ось; въслѣдствіе этого каждая главная центральная ось инерціи тѣла называется свободною постоянною осью вращенія или перманентною осью вращенія; - если тѣлу будетъ сообщено вращеніе вокругъ одной изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи, то, при вышеуказанныхъ предположеніяхъ относительно силъ, тѣло будетъ продолжать вращаться вокругъ этой оси, при чемъ ось будетъ сохранять первоначальное направленіе въ пространствѣ и въ томъ случаѣ, когда ни одна изъ ея точекъ не будетъ закрѣплена.

Положимъ, что точка  $O$  оси закрѣплена. Найдемъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы боковое давленіе на другую точку  $O_1$  равнялось нулю; при этомъ будемъ предпола-

гать, что данные силы или не приложены къ тѣлу, или приводятся къ одной силѣ, линія дѣйствія которой проходитъ черезъ точку  $O$ , или къ парѣ силъ, плоскость которой перпендикулярна къ оси  $OO_1$ .

Изъ уравненій (5) слѣдуетъ, что для того, чтобы  $X'' = 0$  и  $Y'' = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\mathcal{D} = 0$  и  $\mathcal{E} = 0$ , т.е., чтобы ось вращенія была главной осью инерціи тѣла для точки  $O$ ; но при этомъ центр инерціи тѣла можетъ быть и внѣ оси вращенія.

Такимъ образомъ, если ось вращенія тѣла имѣетъ одну закрѣпленную точку, то боковое давленіе на эту ось, стремящееся повернуть ось около закрѣпленной точки, будетъ равно нулю, при указанныхъ выше предположеніяхъ относительно данныхъ силъ, тогда и только тогда, когда эта ось будетъ главной осью инерціи тѣла для закрѣпленной точки.

Отсюда слѣдуетъ, что если возьмемъ за ось вращенія тѣла главную ось инерціи для какой-либо точки, то для того, чтобы, при указанныхъ выше предположеніяхъ относительно данныхъ силъ, тѣло вращалось вокругъ этой оси, не заставляя ее измѣнить направленіе, необходимо и достаточно, чтобы вышеупомянутая точка этой оси была закрѣплена; - *главная ось инерціи тѣла въ какой-угодно точкѣ есть перманентная ось вращенія, когда эта точка закрѣплена.*

Въ заключеніе укажемъ два обстоятельства, вытекающія изъ предыдущаго.

1) Пусть тѣло свободно и силъ къ нему не приложено. Если мы сообщимъ тѣлу угловую скорость вокругъ главной центральной оси инерціи, то тѣло будетъ продолжать вращаться съ той же угловою скоростью вокругъ той же оси, которая будетъ сохранять неизмѣненнымъ свое направленіе.

Если же мы сообщимъ тѣлу угловую скорость вокругъ какой

либо другой оси, то съ теченіемъ времени ось вращенія тѣла будетъ измѣнять свое направленіе.

2) Пусть тѣло имѣетъ закрѣпленную точку и данныя силы или не приложены къ тѣлу или приводятся къ одной, проходящей черезъ закрѣпленную точку, какъ это имѣетъ мѣсто, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда на тѣло дѣйствуютъ силы тяжести и центр тяжести закрѣпленъ.

Если мы сообщимъ тѣлу угловую скорость *вокругъ главной оси инерціи* для закрѣпленной точки, то тѣло будетъ продолжать вращаться съ тою же угловою скоростью *вокругъ той же оси*, которая будетъ сохранять неизмѣннымъ свое направленіе.

Если же мы сообщимъ тѣлу угловую скорость *вокругъ какой либо другой оси*, проходящей черезъ закрѣпленную точку, то съ теченіемъ времени ось вращенія тѣла будетъ измѣнять свое направленіе.

-----

На основаніи сказаннаго выше о боковомъ давленіи вращающагося тѣла на ось, при изготовленіи такихъ машинныхъ частей, которыя должны быстро вращаться, какъ, напримѣръ, маховое колесо, паровозное колесо и т.д., для того, чтобы по возможно-сти уменьшить давленіе на ось, всегда стараются такъ обточить эти части, чтобы ось вращенія совпадала съ главною центральною осью инерціи. Если такое совпаденіе не достигнуто, то давленіе на ось, которое, какъ мы видѣли, зависитъ, между прочимъ, отъ  $\sin\varphi$  и  $\cos\varphi$ , выражается въ томъ, что происходятъ колебанія оси и удары ея о подшипники.



# § 5. Движеніе твердаго тѣла, параллельное неподвижной плоскости.

Въ Кинематикѣ было указано, что для изученія движенія твердаго тѣла, параллельнаго неподвижной плоскости, достаточно рассмотреть движеніе той плоской фигуры, которая получается при пересѣченіи тѣла какой-либо плоскостью, параллельной неподвижной, мы возьмемъ ту фигуру, въ плоскости которой заключается центръ тяжести тѣла, эту плоскость примемъ за плоскость  $OXY$ , тогда для опредѣленія движенія тѣла достаточно опредѣлить движеніе центра тяжести (его координаты  $x_c, y_c$ ) и уголъ поворота ( $\varphi$ ) фигуры вокругъ центра тяжести, какъ функций времени.

Для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ  $x_c, y_c$  и  $\varphi$  нужны три уравненія, два изъ нихъ даетъ законъ движенія центра тяжести, третье - законъ моментовъ въ примѣненіи къ вращенію вокругъ оси, проходящей черезъ центръ тяжести.

Если моментъ инерціи тѣла относительно оси, проведенной черезъ центръ тяжести перпендикулярно къ плоскости фигуры ( $OZ$ ), обозначимъ черезъ  $J_c$ , а сумму моментовъ всѣхъ приложенныхъ къ тѣлу силъ относительно той же оси черезъ  $L_c$ , то дифференціальныя уравненія движенія тѣла будутъ:

$$\left. \begin{aligned} M \cdot x_c' &= \sum X, \\ M \cdot y_c' &= \sum Y, \\ J_c \cdot \varphi' &= L_c. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если данное тѣло несвободно, то въ эти уравненія мы должны ввести какъ реакціи (нормальныя) опоры, такъ и силы тренія.

При движеніи тѣла по нѣкоторой поверхности, предполагая, что движеніе параллельно нѣкоторой плоскости, различаютъ три случая движенія. - говорятъ, что тѣло совершаетъ

1) *скольженіе* по поверхности, когда точка прикосновенія тѣла къ данной поверхности сохраняетъ неизмѣнно свое положеніе на поверхности тѣла, т. е. когда путь, проходимый точкой прикосновенія по тѣлу равенъ нулю;

2) *катаніе*, когда пути, проходимые точкою прикосновенія по тѣлу и по поверхности, имѣютъ одинаковую длину,

3) *скольженіе*, соединенное съ *катаніемъ*, когда длины путей, проходимыхъ точкою прикосновенія по тѣлу и по поверхности имѣютъ различныя длины.

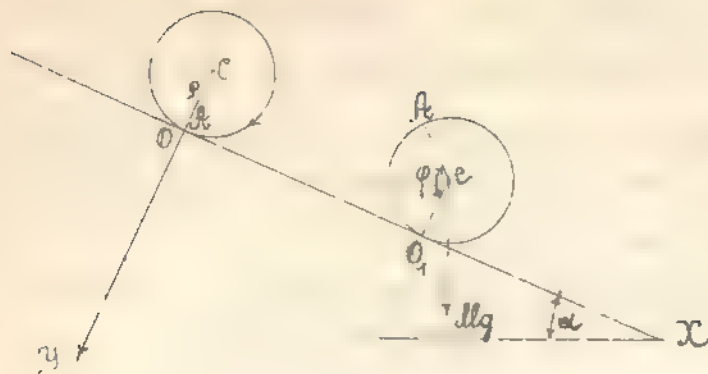
Во всѣхъ этихъ случаяхъ, вообще говоря, существуютъ силы тренія, дѣйствующія въ общей касательной плоскости.

Опыты показали, что отношеніе силы тренія къ нормальной реакціи опоры зависитъ только отъ степени шероховатости соприкасающихся поверхностей, т. е. отъ матеріала и его обработки, и при существованіи скольженія, хотя бы и соединеннаго съ катаніемъ, равно нѣкоторой постоянной величинѣ, называемой *коэффициентомъ динамическаго тренія*: - коэффициентъ динамическаго тренія вообще меньше коэффициента статическаго тренія.

*Примръ.* Рассмотримъ движеніе тяжелаго, однороднаго круглаго цилиндра по наклонной плоскости, составляющей съ горизонтомъ уголъ  $\alpha$  (не  $- 90^\circ$ ), причемъ будемъ предполагать, что осуществляетъ сила тренія между плоскостью и цилиндромъ.

Ось  $Ox$  направимъ по линіи наибольшаго ската внизъ (черт. 102), ось  $Oy$  также внизъ. Обозначимъ: радіусъ цилиндра  $\varphi$ , масса его  $M$ , коэффициентъ динамическаго тренія  $k$ .

Пусть въ начальній моментъ



$$\begin{aligned} t_0 &= 0; \\ x_{C0} &= 0, \\ (y_C)_0 &= -R, \\ \varphi_0 &= 0, \end{aligned}$$

и скорость цилиндра равна нулю.

Обозначая нормальную реакцию плоскости через

Чертеж 103.

$R$ , а силу трения через  $F$  ( $F = kR$ ), получим на основании уравнений (5) следующие дифференциальные уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} Mx_C'' &= Mg \sin \alpha - F, \\ My_C'' &= Mg \cos \alpha - R, \\ \frac{1}{2} M R^2 \varphi'' &= R \cdot F. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5')$$

Очевидно, расстояние центра тяжести цилиндра отъ оси  $Ox$  постоянно:

$$y_C = -R;$$

следовательно:

$$y_C'' = 0.$$

и на основании второго изъ уравнений (5') находимъ:

$$R = Mg \cos \alpha$$

Такимъ образомъ, сила трения будетъ:

$$F = kMg \cos \alpha.$$

Подставляя найденную величину силы трения въ первое изъ уравнений (5'), получимъ по сокращеніи на  $M$

$$x_c' = g \cdot (\sin \alpha - k \cos \alpha) = \text{const.};$$

откуда, принимая во внимание начальныя данныя, находимъ:

$$x' = g t \cos \alpha (\tan \alpha - k),$$

и

$$x_c = \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha (\tan \alpha - k).$$

Подставляя величину силы тренія въ третье изъ уравненій (5'), получимъ по сокращеніи на  $\mathcal{M} \cdot \varphi$ :

$$\varphi' = \frac{2 k g \cos \alpha}{\rho};$$

откуда, принимая во вниманіе начальныя условія, найдетъ:

$$\varphi' = \frac{2 k}{\rho} g t \cos \alpha,$$

и

$$\varphi = \frac{k}{\rho} g t^2 \cos \alpha.$$

Разсмотримъ какое движеніе будетъ совершать нашъ цилиндръ при различныхъ значеніяхъ коэффициента тренія.

Скольженіе будетъ, очевидно, тогда, когда уголъ  $\varphi$  все время будетъ равенъ нулю, что возможно только при  $k=0$ , т.е. при условіи, что тѣло и наклонная плоскость идеально гладкія.

Разберемъ случай, когда коэффициентъ  $k$  не равенъ нулю. Путь, проходящій точкою прикосновенія по наклонной плоскости, равенъ:

$$OO' = x_c,$$

а путь, проходящій ею по поверхности цилиндра, равенъ:

$$O\mathcal{H} = \rho \cdot \varphi.$$

Разница длинъ обоихъ путей будетъ:

$$x_c - \rho \cdot \varphi = \frac{1}{2} g t^2 \cos \alpha (\tan \alpha - 3k).$$

Отсюда слѣдуетъ, что когда

$$\operatorname{tg} \alpha > 3k,$$

т. е. когда

$$k < \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

тогда имѣемъ случай *скольженія*, соединеннаго съ *кажаніемъ*;  
когда же

$$k = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

получаемъ, какъ предѣльный случай для нашихъ формулъ, случай *чистаго казанія*; при большихъ значеніяхъ коэффициента *трѣнія*:

$$k > \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

наши формулы не имѣютъ мѣста.

## Г Л А В А X.

### ТЕОРІЯ УДАРА.

#### § 1. Измѣненіе количества движенія и импульсъ силы.

При движеніи тѣла (въ частности, матеріальной точки), встрѣчаются такіе случаи, въ которыхъ скорость тѣла значительно измѣняется въ чрезвычайно малый промежутокъ времени.

Такое явленіе называется *ударомъ*.

Какъ примѣръ можно указать ударъ упругаго шара о стѣнку.  
Въ моментъ встрѣчи со стѣнкою *AB* (черт. 104) шаръ имѣлъ нѣ-



Чертеж 104.

продолжительность удара, всегда пренебрегают.

Рассмотрим приращение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени, т.е., геометрическую разность между количествами точки в концѣ и в началѣ этого промежутка.

Если  $MK$  (черт.105) количество движения точки в моментъ  $t_0$ ,  $M_1K_1$  - количество

движения в моментъ  $t_1$  и если  $M_1K_1 \neq MK$  то  $KK_1$  и будетъ геометрическое приращение количества движения.

Изъ дифференціаль-  
ныхъ уравненій движенія  
точки

$$m\dot{x} = X,$$

$$m\dot{y} = Y,$$

$$m\dot{z} = Z,$$



Чертеж 105.



гдѣ  $X, Y, Z$ , обозначаютъ проекціи равнодѣйствующей всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкѣ \*), помноживъ обѣ части каждаго изъ нихъ на  $dt$ , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} d(mx') &= X \cdot dt, \\ d(my') &= Y \cdot dt, \\ d(mz') &= Z \cdot dt. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Интегрируя обѣ части каждаго изъ этихъ равенствъ отъ нѣ-  
котораго момента  $t_0$  до нѣкотораго момента  $t_1$ , получимъ:

$$\left. \begin{aligned} (mx')_1 - (mx')_0 &= \int_{t_0}^{t_1} X \cdot dt, \\ (my')_1 - (my')_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Y \cdot dt, \\ (mz')_1 - (mz')_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Z \cdot dt. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1')$$

Въ лѣвыхъ частяхъ уравненій (1') имѣемъ проекціи на коор-  
динатныя оси геометрическаго приращенія количества движенія  
за время отъ момента  $t_0$  до момента  $t_1$ .

Интегралы въ правыхъ частяхъ уравненій (1) мы можемъ раз-  
сматривать, какъ проекціи на координатныя оси нѣкотораго век-  
тора  $\mathcal{J}$  :

$$\mathcal{J} \cos(\mathcal{J}, X) = \int_{t_0}^{t_1} X \cdot dt,$$

$$\mathcal{J} \cos(\mathcal{J}, Y) = \int_{t_0}^{t_1} Y \cdot dt,$$

$$\mathcal{J} \cos(\mathcal{J}, Z) = \int_{t_0}^{t_1} Z \cdot dt.$$

---

\*) Въ число этихъ силъ, когда точка не свободна, входятъ и  
реакція поверхности или реакція кривой.

Векторъ  $\delta$ , опредѣленный этими проекціями, называется импульсомъ силы  $F(X, Y, Z)$  за время отъ момента  $t_0$  до момента  $t_1$  \*).

Въ томъ случаѣ, когда сила во все время отъ  $t_0$  до  $t_1$  сохраняетъ постоянное направленіе, то импульсъ ея направленъ по той же прямой, и если величина силы равна  $F$ , то величина импульса будетъ  $\int_{t_0}^{t_1} F \cdot dt$ . Пусть, напримѣръ, сила  $F$  остается параллельной оси  $OZ$ , тогда, очевидно:

$$\delta \cos(\delta, X) = \delta \cos(\delta, Y) = 0,$$

$$\delta \cos(\delta, Z) = \delta = \int_{t_0}^{t_1} F \cdot dt.$$

Если при постоянствѣ направленія сила постоянна по величинѣ, то импульсъ силы равенъ произведенію величины ея на промежутокъ времени:

$$F(t_1 - t_0).$$

Примѣръ. На точку дѣйствуетъ сила тяжести.

Ось  $OZ$  направимъ по вертикали вверхъ.

Очевидно:

$$X=0, Y=0, Z=-mg.$$

Проекціи импульса силы тяжести на координатныя оси будутъ:

$$\delta \cos(\delta, X) = 0,$$

$$\delta \cos(\delta, Y) = 0,$$

---

\*) Безконечно малый векторъ, проекціи котораго на коор. оси равны произведеніямъ  $Xdt, Ydt, Zdt$  называется э л е м е н т а р н ы м ъ и м п у л ь с о м ъ силы: онъ всегда направленъ по направленію силы и равенъ произведенію величины силы на безконечно малый промежутокъ времени.

$$S \cos(\angle, \vec{x}) = -mg(t_1 - t_0);$$

значить импульс по величинѣ равенъ:

$$S = mg(t_1 - t_0)$$

и направленъ по вертикали внизъ.

Если сила измѣняетъ свое направленіе за время отъ  $t_0$  до  $t_1$ , то для опредѣленія импульса силы мы должны знать, какими функціями времени выражаютъ ея проекціи на координатныя оси.

Уравненія (1') выражаютъ слѣдующее предложеніе:

Геометрическое приращеніе количества движенія точки за некоторый промежутокъ времени по величинѣ и направленію равно импульсу силы, къ точке приложенной, за тотъ же промежутокъ времени \*).

Это можно выразить и однимъ геометрическимъ уравненіемъ:

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = S \quad \dots \quad (2)$$

Уравненіе (2) позволяетъ намъ рѣшить двѣ задачи.

1) Зная измѣненіе скорости точки за некоторый промежутокъ времени, опредѣлить импульсъ силы за тотъ же промежутокъ.

Зная измѣненіе скорости, знаемъ измѣненіе количества движенія. Если  $MK$  и  $ML$  (черт. 101) количества движенія въ моменты  $t_0$  и  $t_1$ , то  $MS \neq KL$  и есть импульсъ силы.

2) Зная скорость точки въ моментѣ  $t_0$  и импульсъ силы за промежутокъ времени отъ  $t_0$  до  $t_1$ , опредѣлить скорость въ моментѣ  $t_1$ .

Если  $MK$  - количество движенія въ моментѣ  $t_0$ ,  $KL \neq MS$  - импульсъ силы за промежутокъ времени отъ  $t_0$  до  $t_1$ , то  $ML$  есть количество движенія  $m\vec{v}_1$  въ моментѣ  $t_1$ ; раздѣляя его на  $m$  найдемъ скорость  $\vec{v}_1$ .

---

\*) Уравненія (1) выражаютъ такое же предложеніе для бесконечно малатаго промежутка времени.

Если скорость точки въ моментъ  $t_0$  равна нулю ( $v_0 = 0$ ), тогда импульсъ силы за время отъ  $t_0$  до  $t_1$  равенъ по величинѣ и направленію количеству движенія точки въ моментъ  $t_1$ :

$$S = m \overline{v_1}.$$

Въ случаѣ постоянной (по величинѣ и направленію) силы  $A$ , на основаніи вышеизложеннаго при  $v_0 = 0$  будемъ имѣть:

$$A(t_1 - t_0) = mv_1,$$

откуда

$$v_1 = \frac{A(t_1 - t_0)}{m},$$

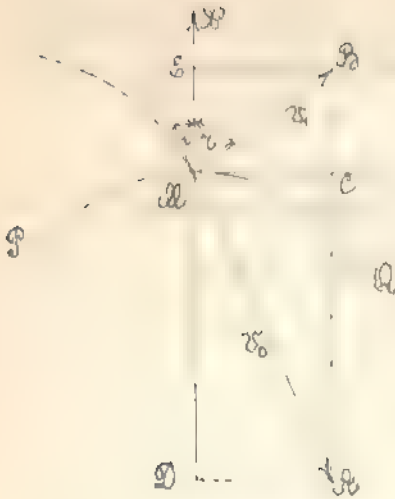
т.е. въ этомъ случаѣ для полученія нѣкоторой скорости мы должны приложить во столько разъ большую силу во сколько разъ будетъ меньше промежутокъ времени, въ теченіе котораго она должна дѣйствовать.

Вообще, сила, которая дѣйствуетъ во время удара и обуславливаетъ быстрое, значительное измѣненіе скорости, такъ велика, что по сравненію съ нею такими силами, какъ силы тяжести, силы притяженія и отталкиванія, можно пренебрегать. Въ случаѣ удара шара о стѣнку (точки о поверхность) чрезвычайно быстрое измѣненіе скорости шара (точки) производитъ реакція стѣнки (поверхности), направленная по нормали къ послѣдней.

## § 2. Ударъ точки о поверхность

Опредѣлимъ скорость точки послѣ удара ея о неподвижную поверхность.

Пусть точка  $M$  (черт. 106) встрѣчаетъ поверхность  $PQ$  со скоростью  $v_0$ , которая составляетъ съ нормалью  $N$  къ поверхно-



Чертежъ 106.

сти некоторый уголъ, равный  $(180^\circ - \gamma)$ , причемъ уголъ  $\gamma$  называется *уголомъ паденія*; тѣмъ же образомъ точка отрѣзается отъ поверхности съ некоторою скоростью  $v_1$ , которая составляетъ съ нормалью уголъ  $\gamma$ , называемый *уголомъ отраженія*.

Найдемъ скорость  $v_1$ . Пренебрегая, на основаніи сказаннаго въ концѣ § 1, всѣми силами, приложенными къ точкѣ, кромѣ

реакціи поверхности, замѣчаемъ, что такъ какъ эта реакція постоянно направлена по нормали  $NN'$ , то импульсъ силе все время направленъ по этой нормали, значитъ и геометрическое измѣненіе количества движенія, а слѣдовательно, и геометрическое измѣненіе скорости, направлено все время по нормали  $NN'$ .

Такимъ образомъ, измѣненіе скорости  $AB \parallel NN'$ . Отсюда слѣдуетъ, что при ударѣ точки о поверхность, проекціи скоростей  $v_0$  и  $v_1$  на касательную плоскость одинаковы и равны  $MC$  (гдѣ  $MC \perp NN'$ ). т.е.:

$$v_1 \sin \alpha = v_0 \sin \alpha \quad \dots \dots \dots (3)$$

Для нахождения проекціи скорости  $v_1$  на нормаль, надо принять во вниманіе упругія свойства точки и поверхности, о которую точка ударяется.

Степень упругости характеризуется некоторымъ коэффициентомъ  $k$ , который называется *коэффициентомъ возстановленія*.

Коэффициентъ возстановленія заключается всегда въ предѣлахъ отъ 0 до 1:

$$0 \leq k \leq 1$$

Въ случаѣ совершенной упругости:  $k = 1$  ; въ случаѣ совершенной неупругости  $k = 0$  - въ случаѣ несовершенной упругости:

$$0 < k < 1 .$$

Проекція скорости  $v_1$  на нормаль выражается въ зависимости отъ коэффициента восстановления и проекціи скорости  $v_0$  слѣдующимъ образомъ:

$$v_1 \cos i = k v_0 \cos i \dots \dots \dots (3_1)$$

Уравненія (3) и (3<sub>1</sub>) даютъ намъ возможность опредѣлять скорость  $v_1$  , если известна скорость  $v_0$  и коэффициентъ восстановления: находимъ проекцію скорости  $v_0$  на касательную плоскость и на нормаль:

$$MC = v_0 \sin i ,$$

$$MD = v_0 \cos i ;$$

множимъ  $MD$  на коэффициентъ восстановления:

$$ME = k MD = k v_0 \cos i ;$$

геометрическая сумма векторовъ  $MC$  и  $ME$  в есть скорость  $v_1$ .

Для равенство (3) на (3<sub>1</sub>) находимъ:

$$\tan \tau = k \tan i .$$

откуда:

$$k = \frac{\tan \tau}{\tan i} ,$$

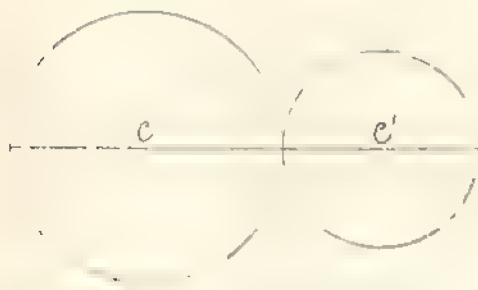
т.е. коэффициентъ восстановления есть отношеніе тангенса угла паденія къ тангенсу угла отраженія, - это обстоятельство позволяетъ намъ опредѣлять коэффициентъ восстановления изъ опыта.



### § 3. Соудареніе шаровъ \*)

При соудареніи двухъ шаровъ ударъ называется прямымъ тогда, когда эти шары не вращаются и при томъ скорости ихъ центровъ направлены по прямой, соединяющей центры.

Пусть даны два шара, центры которых  $C$  и  $C'$ , а массы соответственно  $m$  и  $m'$  (черт. 107).



Чертежъ 107.

Обозначимъ: черезъ  $t_0$  тотъ моментъ, въ который шары сталкиваются между собой: скорости шаровъ  $C$  и  $C'$

въ этотъ моментъ соответственно черезъ  $v_0$  и  $u_0$ , назовемъ черезъ  $t_1$  тотъ моментъ, когда ударъ окончится, и соответственные скорости шаровъ черезъ  $v_1$  и  $u_1$ .

Чтобы различать направленія скоростей, условимся приписывать  $v_0$ ,  $u_0$ ,  $v_1$ ,  $u_1$ , знакъ  $+$ , когда скорости направлены вправо, и знакъ  $-$ , когда онѣ направлены влѣво.

Легко видѣть, что ударъ шаровъ произойдетъ въ моментъ  $t_0$  только при томъ условіи, что  $v_0 > u_0$ .

Послѣ встрѣчи шаровъ въ одной точкѣ центры ихъ начинаютъ сближаться, такъ что происходитъ деформация шаровъ около точки встрѣчи (первый актъ удара). Этой деформации противодействуютъ силы реакцій, которыя стремятся раздвинуть шары и производятъ, слѣдовательно, въ теченіе перваго акта удара отри-

---

\*) Выводы, къ которымъ мы приходимъ въ этомъ §-н, имѣютъ приложеніе, наприимръ, при разсмотрѣніи вопросовъ о косыхъ.

пательную работу. Въ нѣкоторый моментъ разстояніе между центрами становится наименьшимъ и шары стремятся затѣмъ возстановить свою форму (второй актъ удара), — силы реакцій производятъ положительную работу; наступаетъ опять моментъ, когда шары прикасаются въ одной точкѣ и ударъ оконченъ.

Опредѣлимъ скорости шаровъ послѣ прямого удара, если извѣстны скорости до удара.

Воспользуемся прежде всего закономъ движенія центра тяжести. Внѣшними силами, наприимѣръ, силами тяжести, мы при ударѣ пренебрегаемъ, принимая во вниманіе лишь реакціи, которыя какъ силы внутреннія, на движеніе центра тяжести не имѣютъ никакого вліянія, слѣдовательно, общій центръ тяжести обоихъ шаровъ движется прямолинейно и равномерно и потому послѣ удара онъ имѣетъ ту же скорость, что и до удара. Такъ какъ ударъ прямой, то эта скорость выразится слѣдующимъ образомъ:

$$\frac{mv_0 + m'v'_0}{m+m'} = \frac{mv_1 + m'u_1}{m+m'} ,$$

откуда.

$$mv_0 + m'u_0 = mv_1 + m'u_1 \dots \dots \dots (4)$$

Рассмотримъ затѣмъ отдѣльно три случая.

*I случай. Ударъ совершенно неупругихъ шаровъ.*

Въ этомъ случаѣ имѣетъ мѣсто только одинъ первый актъ удара, т.е. шары, сблизившись, деформируются и остаются въ состояніи деформациі. По окончаніи удара оба шара получаютъ одну и ту же скорость:

$$v_1 = u_1 \dots \dots \dots (5)$$

На основаніи уравненій (4) и (5), находимъ:

$$v_1 = u_1 = \frac{mv_0 + m'u_0}{m+m'} .$$

Въ частномъ случаѣ, когда  $m=m'$  , имѣемъ:

$$v = u \frac{v_0 + u_0}{2}.$$

Посмотримъ, какъ измѣняется живая сила при ударѣ совершенно неупругихъ шаровъ. Живая сила въ моментъ  $t_0$  будетъ:

$$\frac{1}{2} \cdot (m \cdot v_0^2 + m' \cdot u_0^2),$$

а въ моментъ  $t_1$ :

$$\frac{1}{2} (m + m') v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{(m \cdot v_0 + m' \cdot u_0)^2}{m + m'}.$$

Разность живыхъ силъ въ моменты  $t_0$  и  $t_1$  будетъ:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (m v_0^2 + m' u_0^2) - \frac{1}{2} \frac{(m v_0 + m' u_0)^2}{m + m'} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{1}{m + m'} \{ m^2 v_0^2 + m m' v_0^2 + m m' u_0^2 + m'^2 u_0^2 - m^2 v_0^2 - 2 m m' v_0 u_0 - m'^2 u_0^2 \} = \\ & = \frac{m m'}{2 (m + m')} (v_0^2 + u_0^2 - 2 v_0 u_0) = \\ & = \frac{m m'}{2 (m + m')} (v_0 - u_0)^2. \end{aligned}$$

Отсюда видимъ, что разность между живою силою въ моментъ  $t_0$  и живою силою въ моментъ  $t_1$  всегда положительна, следовательно, при неупругомъ ударѣ всегда происходитъ потеря живой силы; по закону сохранения энергіи часть живой силы превращается въ теплоту.

Величина того импульса, который реакція производитъ при ударѣ, равна измѣненію количества движенія того или другого шара, — она равна:

$$m' u_1 - m u_0.$$

Подставляя сюда вѣсто скорости  $u_1$  найденное для нея выраженіе черезъ  $u_0$  и  $v_0$ , получимъ:

$$m' u_1 - m u_0 = \frac{1}{m + m'} (m m' v_0 + m'^2 u_0 - m m' u_0 - m^2 u_0) = \frac{m m'}{m + m'} \cdot (v_0 - u_0)$$

Если бы мы знали промежутокъ времени, то раздѣливъ на него найденный импульсъ, мы бы опредѣляли среднюю величину ре-

акціи.

*II случай. Ударъ совершенно упругихъ шаровъ.*

Въ этомъ случаѣ за первымъ актомъ удара слѣдуетъ второй актъ, въ теченіе котораго шаръ возстановляетъ свою первоначальную форму, и въ реакціи производятъ положительную работу, равную по величинѣ отрицательной работѣ производимой реакціей во время перваго акта. Такимъ образомъ, вся работа реакціи за время удара равна нулю; поэтому сумма живыхъ силъ послѣ удара равна суммѣ живыхъ силъ до удара:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_0^2}{2} + \frac{m_2 v_0^2}{2} ;$$

откуда имѣемъ:

$$m_1(v_1^2 - v_0^2) = m_2(v_0^2 - v_2^2), \quad (6)$$

Уравненія (6) и (4) позволяютъ намъ найти неизвѣстныя скорости  $v_1$  и  $v_2$ . Изъ уравненія (4) имѣемъ:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_0 + m_2 v_0. \quad (7)$$

Для численной (6) и (7), находимъ:

$$v_1 + v_2 = v_0 + v_0. \quad (8)$$

откуда:

$$v_1 = v_1 + v_2 - v_0,$$

и

$$v_1 = v_1 + v_2 - v_0.$$

Подставляя въ уравненіе (7) вмѣсто  $v_1$  найденное для него выраженіе черезъ  $v_1$ , получимъ:

$$m_1(v_1 + v_2 - v_0) = m_2(v_0 - v_1).$$

Прибавляя къ обѣимъ частямъ этого уравненія по  $m_1 v_0$  найдемъ:

$$2m_1(v_0 - v_0) = (m_1 + m_2)(v_0 - v_1),$$

откуда:

$$u_1 = u_0 + \frac{2m}{m+m'} (v_0 - u_0) .$$

Въ частномъ случаѣ, когда массы шаровъ равны  $m=m'$ , тогда:

$$v_0 = u_0 \quad \text{и} \quad u_1 = v_0 .$$

т.е. шары обмѣниваются скоростями.

### III случай. Ударъ не вполне упругихъ шаровъ.

Этотъ случай отличается отъ предыдущаго тѣмъ, что здѣсь во время второго акта удара первоначальная форма шаровъ восстанавливается не вполне, поэтому сумма работъ реакцій за оба акта удара будетъ величина отрицательная и, слѣдовательно, имѣетъ мѣсто потеря живой силы.

Въ случаѣ совершенно упругихъ шаровъ уравненіе (8) давало:

$$v_1 - u_1 = u_0 - v_0 ;$$

когда же шары не вполне упруги, имѣемъ:

$$v_1 - u_1 = k (u_0 - v_0) , \quad (9)$$

гдѣ  $k$  коэффициентъ восстановления.

Изъ уравненія (9) находимъ:

$$u_1 = v_1 - k (u_0 - v_0) ,$$

$$v_1 = u_1 + k (v_0 - u_0) .$$

Подставляя въ уравненіе (7) вмѣсто  $u_1$  его выраженіе черезъ  $v_1$  получимъ:

$$-m(v_1 - v_0) = m'u_0 - m'v_1 + k m' (u_0 - v_0)$$

Вычитая изъ обѣихъ частей этого равенства  $m v_0$ , найдемъ:

$$(m+m')(v_1 - v_0) = (1+k) m' (u_0 - v_0) ;$$

откуда:

$$v_1 = v_0 + \frac{(1+k) m'}{m+m'} (u_0 - v_0) \quad (10)$$

Подобнымъ же образомъ найдемъ:

$$u = u_0 + \frac{(1+k)m'}{m+m'} \cdot (v_1 - u_0) \dots \dots \dots (10_1)$$

Формулы (10) и (10<sub>1</sub>) суть общія для всѣхъ случаевъ прямого удара шаровъ: мы получимъ изъ нихъ скорости  $v_1$  и  $u_1$ , полагая  $k=0$  въ случай совершенно неупругихъ шаровъ, и, полагая  $k=1$ , въ случай совершенно упругихъ шаровъ.

Коэффициентъ возстановленія  $k$  определяется изъ опыта слѣдующимъ образомъ заставляя шарикъ падать на неподвижную плоскость, которую, очевидно, можно разсматривать, какъ поверхность шара безконечно большаго радіуса и безконечно большаго массе.

Такимъ образомъ, въ этомъ случае  $m' = \infty$ ,  $u_0 = 0$ , и формулы (10) и (10<sub>1</sub>) дадутъ намъ:

$$v_1 = v_0 - (1+k)v_0 = -k v_0, \quad \dots \quad (10')$$

$$u_1 = 0 \dots \dots \dots (10'_1)$$

Если шарикъ падаетъ съ высоты  $h$ , то, какъ извѣстно, онъ упадетъ на плоскость со скоростью

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Если по отраженіи шарикъ поднимается на высоту  $h_1$ , то онъ, очевидно, отразился со скоростью

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

Такимъ образомъ:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}, \text{ и } h_1 = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Принимая во вниманіе уравненіе (10<sub>1</sub>), находимъ

$$h_1 = \frac{k^2 v_0^2}{2g} = k^2 h;$$



откуда:

$$k = \frac{h_1}{h_2} = k \frac{h_1}{h_2}$$

Измѣряя высоты  $h_1$  и  $h_2$ , найдемъ по этой формулѣ коэффициентъ восстановления. Тѣмъ же путемъ найдемъ для слоновой кости  $k = 0,8$ , для стали  $k = 0,5$ .

Все сказанное въ § 3 о соудареніи шаровъ можно распространить на случай какихъ угодно жидк., если только ударъ прямой,

т.е., если соударяющіяся тѣла не вращаются и если скорости ихъ центровъ тяжести направлены по прямой, соединяющей центры.

Примѣръ: вколачиваніе гвоздя молоткомъ.



Чертежъ 108.

#### § 4. Косой ударъ.

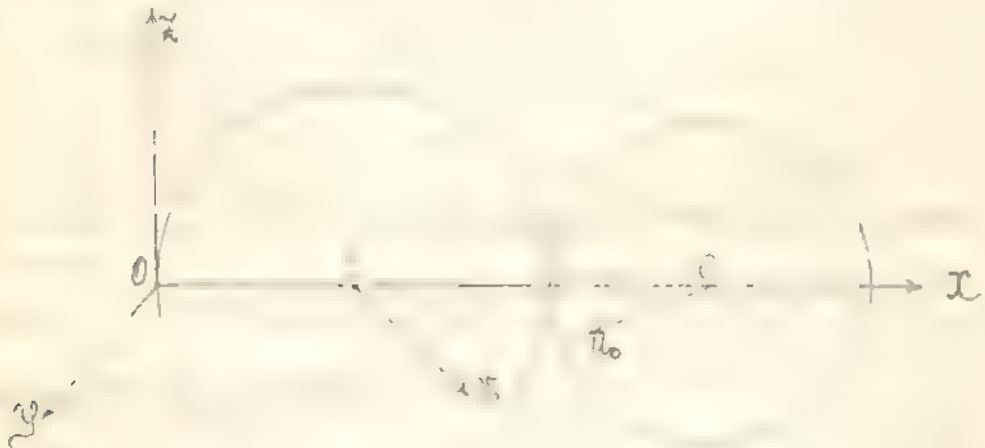
Пусть даны два шара, центры которыхъ суть  $C$  и  $C'$  (черт. 109); массы соответственно  $m$  и  $m'$ , скорости въ начальный моментъ удара  $u_0$  соответственно  $u_0$  и  $u'_0$ , а въ конечный моментъ  $t_1$  :  $u_1$  и  $u'_1$ .

Скорости  $u_0$  и  $u'_0$  составляютъ съ линіей центровъ углы, не равные нулю и  $180^\circ$ .

На основаніи извѣстнаго закона центръ тяжести каждаго изъ этихъ шаровъ движется такъ, какъ если бы въ немъ была сосредоточена вся масса соответственнаго шара, и къ нему была при-

ложена реакція другого шара (остальними силами ми пренебрегаем).

Изміненіє количества движенія каждого из центров  $C$  и  $C'$  по величинѣ и направленію равно импульсу реакціи другого шара, но эта послѣдняя все время направлена по общей нормали (линіи центровъ), следовательно, импульсъ ея направленъ по линіи центровъ, поэтому измѣненіє количества движенія, а следовательно и измѣненіє скорости каждого центра направлено по той же прямой  $CC'$ .



Чертежъ 109.

Принимая линію центровъ за ось  $CC'$ , мы можемъ, на основаніи только что сказаннаго, утверждать, что проекціи скоростей центровъ  $C$  и  $C'$  на оси  $CC'$  и  $CC'$  остаются неизмѣнными за все время удара, а измѣняются лишь проекціи этихъ скоростей на ось  $CC'$ .

Такимъ образомъ, мы можемъ написать:

$$v_1 \cos(\alpha, \lambda') = v_0 \cos(\alpha, \lambda) + \frac{1}{m}$$

$$v_1 \cos(\alpha, \mu) = v_0 \cos(\alpha, \mu),$$

$$u_1 \cos(u_1, \tilde{z}) = u_0 \cos(u_0, \tilde{z}),$$

$$u_1 \cos(u_1, X) = u_0 \cos(u_0, X) - \frac{J}{m},$$

$$u_1 \cos(u_1, Y) = u_0 \cos(u_0, Y),$$

$$u_1 \cos(u_1, \tilde{z}) = u_0 \cos(u_0, \tilde{z}).$$

По отношенію къ проекціямъ скоростей на ось  $OX$  приймемъ все то, что относится къ случаю прямого удара.

### § 5. Дѣйствіе удара на твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси.

Ось вращенія тѣла принимаемъ за ось  $OZ$  : проекція дѣйствующей при ударѣ силы обозначимъ черезъ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , а координата точки ея приложенія черезъ  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Найдемъ измѣненіе угловой скорости тѣла.

Уравненіе вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси въ данномъ случаѣ намъ даетъ:

$$M \rho^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = xY - yX,$$

гдѣ  $\rho$  радиусъ инерціи тѣла относительно оси вращенія.

Помножимъ обѣ части этого уравненія на  $dt$  и проинтегрируемъ въ предѣлахъ отъ  $t_0$  до  $t_1$ ; при этомъ координаты  $x$  и  $y$  точки приложенія силы мы вынесемъ за знаки интеграловъ, считая ихъ постоянными на томъ основаніи, что перемѣщеніемъ тѣла за время удара всегда пренебрегаемъ; получимъ:

$$M \rho^2 (\omega_1 - \omega_0) = x \int_{t_0}^{t_1} Y dt - y \int_{t_0}^{t_1} X dt,$$

(гдѣ  $\omega_0$  и  $\omega_1$  обозначаютъ угловую скорость въ моменты  $t_0$  и  $t_1$ ) или

$$M \cdot \dot{\varphi}^2 (\omega_1 - \omega_0) = x \cdot \dot{\delta}_y - y \cdot \dot{\delta}_x, \dots \dots \dots (11)$$

гдѣ  $\dot{\delta}_x$  и  $\dot{\delta}_y$  суть проекціи на оси  $Ox$  и  $Oy$  импульса силы, дѣйствующей при ударѣ.

Уравненіе (11) выражаетъ, что при дѣйствіи удара на твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси, произведеніе момента инерціи на приращеніе угловой скорости равно моменту импульса относительно оси вращенія.

Съ помощью уравненія (11) мы можемъ по даннымъ: удару (импульсу), угловой скорости въ началѣ удара и моменту инерціи тѣла, опредѣлить ту угловую скорость, которую тѣло получитъ послѣ удара, и обратно, зная приращеніе угловой скорости за время удара и моментъ инерціи тѣла, мы можемъ опредѣлить моментъ импульса, который называютъ иногда "импульсивнымъ моментъ".

Въ частномъ случаѣ, когда тѣло до удара находится въ покоѣ ( $\omega_0 = 0$ ), мы съ помощью уравненія (11) можемъ опредѣлить тотъ импульсивный моментъ, который нужно приложить, чтобы сообщить тѣлу угловую скорость  $\omega_1$ : — онъ будетъ, очевидно, равенъ  $M \cdot \omega_1^2$ .

Перейдемъ къ опредѣленію того удара, который испытываетъ ось при данномъ импульсѣ.

Ось вращенія примемъ за ось  $Oz$ , ось  $Ox$  направимъ по той прямой, по которой располагается кратчайшее разстояніе между осью вращенія и даннымъ импульсомъ.

За точку приложенія импульса беремъ точку  $\mathfrak{P}$  ( $x, y, z$ ), въ которой импульсъ пересѣкаетъ ось  $Ox$  (черт. 110).

Обозначимъ проекціи силы, соответствующей разсматриваемому импульсу черезъ  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , тогда уравненія движенія центра инерціи представятся въ видѣ:

$$\left. \begin{aligned} y^0 &= x^0 + x^1, \\ M y^0 &= y + y' + y'', \\ M z^0 &= z + z' + z'' = 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Z}' dt = c,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} X'' dt = a'',$$

$$\int_{t_0}^{t_1} Y'' dt = b'',$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{Z}'' dt = c'',$$

мы получимъ:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{M}[(x_0')_1 - (x_0')_0] &= a' + a'', \\ \mathcal{M}[(y_0')_1 - (y_0')_0] &= b' + b'', \\ 0 &= \Delta_x + c' + c''; \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sum m_i x_i [(y_i')_1 - (y_i')_0] &= h b'', \\ \sum m_i x_i [(x_i')_1 - (x_i')_0] &= -\frac{1}{2} \Delta_x + h a'', \end{aligned} \right\} \quad (13')$$

$$\mathcal{M} \varphi^2(\omega, -\omega_0) = \frac{1}{2} \Delta_y,$$

гдѣ  $\Delta_x = 0$ ,  $\Delta_y$ ,  $\Delta_z$  суть проекціи даннаго импульса, приложеннаго въ точкѣ  $\mathcal{P}$ .

Такъ какъ при вращеніи тѣла около оси вообще

$$x_i' = -y_i \omega,$$

$$y_i' = x_i \omega,$$

а въ частности:

$$x_c' = -y_c \omega,$$

$$y_c' = x_c \omega,$$

то уравненія (12') и (13') мы можемъ переписатьъ въ видѣ



$$\left. \begin{aligned} M y_c(\omega_1 - \omega_0) &= a' + a'', \\ M x_c(\omega_1 - \omega_0) &= \delta_y + b' + b'', \\ 0 &= S_x + c' + c''; \end{aligned} \right\} \quad (12'')$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}(\omega_1 - \omega_0) &= h b'', \\ \mathcal{D}(\omega_1 - \omega_0) &= -p S_x + h a'', \\ M p^2(\omega_1 - \omega_0) &= p S_x, \end{aligned} \right\} \quad (13'')$$

гдѣ

$$\mathcal{D} = \sum m_i y_i x_i,$$

и

$$\mathcal{E} = \sum m_i x_i z_i,$$

центробѣжные моменты инерціи.

Зная  $\omega_0 = 0$ ,  $S_y$ ,  $S_x$ , затѣмъ  $h$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}$  и положеніе центра тяжести  $(x_c, y_c)$  мы сначала съ помощью послѣдняго изъ уравненій (13'') находимъ приращеніе угловой скорости:  $\omega_1 - \omega_0$ , а подставляя найденное для него значеніе въ остальные изъ уравненій (13'') и уравненій (12''), найдемъ боковые удары на ось  $(a', a'', b', b)$  и сумму ударовъ по оси  $(c' + c)$ .

Введемъ теперь условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы ось тѣла совершенно не испытывала удара въ то время, когда само тѣло ударъ получаетъ, т.е. чтобы:

$$a' = 0, \quad a'' = 0,$$

$$b = 0, \quad b' = 0,$$

$$c' + c'' = 0.$$

Изъ перваго изъ уравненій (12'') слѣдуетъ, что для этого необходимо, чтобы

- это условие выражаетъ, что центръ тяжести долженъ лежать въ плоскости  $\chi O \chi$ , т.е. въ плоскости, проходящей черезъ ось перпендикулярно къ направленію удара.

Второе изъ уравненій (12") исполнѣ опредѣляетъ ту точку, въ которой ударъ долженъ быть тѣлу нанесенъ.

Въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе требуетъ, чтобы:

$$M \cdot x_c (\omega_1 - \omega_0) = J_y,$$

но

$$\omega_1 - \omega_0 = \frac{v \cdot J_y}{M \cdot y_c^2};$$

слѣдовательно:

$$\frac{x_c \cdot p}{y_c^2} = 1,$$

или

$$p = \frac{y_c^2}{x_c},$$

т.е. разстояніе  $p$  должно быть равно квадрату плеча инерціи тѣла относительно оси вращенія тѣла, раздѣленному на разстояніе центра тяжести тѣла отъ этой оси. Съ подобнымъ выраженіемъ мы уже встрѣчались, изучая колебаніе физическаго маятника: оно есть не что иное, какъ разстояніе между осью привѣса и осью качаній, т.е. приведенная длина физическаго маятника.

Третье изъ уравненій (12") требуетъ, чтобы  $J_z = 0$ , но такъ какъ и  $J_x = 0$ , то необходимо, чтобы  $J_y = + J$ , значитъ импульсъ  $J$  долженъ быть перпендикуляренъ къ плоскости  $\chi O \chi$ , т.е. къ той плоскости, въ которой заключается ось вращенія и центръ тяжести.

Наконецъ, первая дна изъ уравненій (13") требуютъ, чтобы центробѣжные моменты инерціи  $D$  и  $E$  были нули, т.е., чтобы ось вращенія была главною осью инерціи тѣла въ точкѣ  $O$ .

Есть перечисленные условия необходимы, но они и достаточны, потому что, если они удовлетворяются, то

$$a' = 0 \quad , \quad a'' = 0 \quad ,$$

$$b' = 0 \quad , \quad b'' = 0 \quad ,$$

$$c' + c'' = 0 \quad .$$

Итакъ, для того, чтобы ось вращения не испытывала удара, необходимы и достаточны слѣдующія три условия

1) Ударъ долженъ быть направленъ перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ ось вращения и центръ тяжести тѣла,

2) ударъ долженъ быть расположенъ въ плоскости, перпендикулярной къ оси вращения и пересѣкающей эту ось въ такой точкѣ  $C$ , для которой ось вращения есть главная ось инерціи тѣла, и 3) разстояніе удара отъ оси вращения должно равняться разстоянію отъ этой оси, какъ оси привѣса, до соотвѣтствующей оси качаній.

Точка приложенія удара  $C$  въ этомъ случаѣ называется *центромъ удара*.

Введенныя три условия принимаются во вниманіе при устройствѣ молотовъ.

*Примѣръ. Баллистическій маятникъ.*

Баллистическій маятникъ - это приборъ, служащій для измѣренія скорости снаряда.

Онъ состоитъ изъ пріемника (цилиндра, открытаго со стороны одного изъ основаній), наполненнаго землей и подвѣшеннаго при посредствѣ рамы къ горизонтальной оси, вокругъ которой онъ можетъ вращаться (черт. 111). Снарядъ, вступающій въ пріемникъ, производитъ отклоненіе маятника, по величинѣ котораго нетрудно найти скорость снаряда.

Введемъ обозначенія:

$M.k^2$  - моментъ инерціи маятника относительно оси вращенія;

$l$  - разстояніе центра тяжести маятника отъ оси вращенія;

$m$  - масса снаряда.

$v$  - скорость, съ которою снарядъ вступаетъ въ цилиндръ;

$a$  - разстояніе центра тяжести снаряда отъ оси;

$\omega$  - угловая скорость, которую получаетъ маятникъ, выведенный изъ состоянія покоя вслѣдствіе удара снаряда.

$\alpha$  - уголъ наибольшаго отклоненія маятника.

Количества движенія снаряда въ началѣ и въ концѣ удара равны соответственно  $m.v$  и  $m.a.\omega$ , слѣдовательно, импульсъ, который снарядъ сообщаетъ маятнику, равенъ:

$$J = m.v - m.a.\omega,$$

а моментъ этого импульса равенъ:

$$m.a.v - m.a^2.\omega.$$

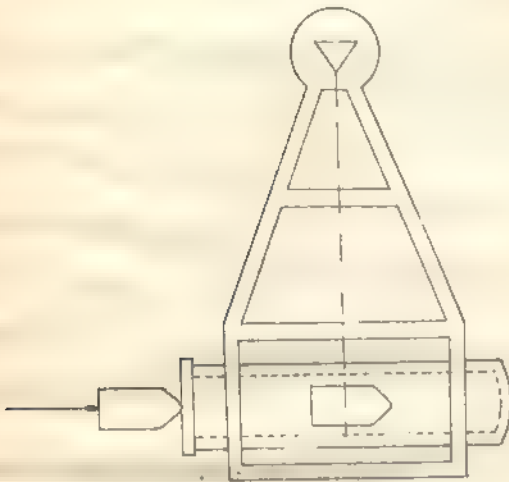
Моментъ количества движенія самого маятника, который въ началѣ удара имѣлъ скорость нуль, а въ концѣ получилъ угловую скорость  $\omega$ , послѣ удара будетъ, очевидно,  $M.k^2.\omega$ .

Приращеніе момента количества движенія, которое получилъ маятникъ, должно быть равно моменту импульса:

$$M.k^2.\omega = m.a.v - m.a^2.\omega,$$

откуда

$$v = \frac{M.k^2 + m.a^2}{m.a} \omega \dots \dots \dots (14)$$



Чертежъ 111.

Выразим угловую скорость  $\omega$  через угол отклонений  $\alpha$ , пользуясь закономъ живой силы.

Сила здѣсь дѣйствующая, именно, сила тяжести, имѣетъ потенціалъ, слѣдовательно, приращеніе живой силы равно разности значеній силовой функціи въ концѣ и въ началѣ удара:

$$-\left[\frac{1}{2} m a^2 \omega^2 + \frac{1}{2} l l k^2 \omega^2\right] - m g a \cos \alpha - l l g l \cos \alpha - m g a, - l l g l.$$

или

$$\frac{1}{2} \omega^2 (m a^2 + l l k^2) = g (m a + l l l) (1 - \cos \alpha);$$

откуда:

$$\omega^2 = \frac{4 g (m a + l l l) \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{m a^2 + l l k^2},$$

и

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{g (m a + l l l)}{m a^2 + l l k^2}} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

Отсюда слѣдуетъ, что угловая скорость при одинаковыхъ прочихъ условіяхъ пропорціональна синусу половины угла отклоненія маятника.

Такимъ образомъ:

$$v = \frac{2 (m a + l l l)}{m a} \sqrt{a g} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Нетрудно видѣть, что первая два условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы ось нашего маятника не испытывала удара, выполняются всегда; третье же условіе требуетъ, чтобы

$$\frac{k^2}{l} = a^2 \quad \text{или} \quad a l = k^2.$$

Если и это условіе выполнено, тогда скорость  $v$  выразится слѣдующимъ образомъ:

$$v = \frac{2}{m a} \sqrt{g (m a + l l l) (m a^2 - l l k^2)} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

# О Г Л А В Л Е Н І Е .

## КИНЕМАТИКА.

	Стр.
ГЛАВА I. СКОРОСТЬ ТОЧКИ (Дополненія) . . . . .	5
§1. Выводъ выраженія для проекціи скорости точки на какую-угодно ось . . . . .	5
§2. Приложение выведенныхъ формулъ . . . . .	8
§3. Годографъ скорости . . . . .	10
ГЛАВА II. УСКОРЕНІЕ ТОЧКИ (Дополненія) . . . . .	13
§1. Связь между ускореніемъ и скоростью точки, вы- черчивающей годографъ скорости . . . . .	13
§2. Выводъ выраженія для проекціи ускоренія точки на какую-угодно ось постоянного или перемен- наго направленія . . . . .	15
§3. Касательное и нормальное ускореніе точки . . . . .	13
ГЛАВА III. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ И СОСТАВНОЕ ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ . . . . .	22
§1. Относительное и переносное движеніе точки . . . . .	22
Составное движеніе точки . . . . .	26
§2. Определеніе абсолютнаго и относительнаго дви- женія точки . . . . .	23
Первый случай. Тѣло движется поступательно . . . . .	29
Задача I. Определеніе абсолютнаго движенія точки, когда даны движеніе тѣла и относи- тельное движеніе точки . . . . .	29
Скорость и ускореніе абсолютнаго движенія 1-го случая . . . . .	30
Задача II. Определеніе относительнаго движе-	



нія точки по отношенію къ тѣлу, когда даны: поступательное движеніе тѣла и абсолютное движеніе точки . . . . .	31
Скорость и ускореніе относительнаго движе- нія 1-го случая . . . . .	31

Второй случай. Тѣло вращается вокругъ оси . . . . .	32
---	----

Задача I. Опредѣленіе абсолютнаго движенія точ- ки, когда даны: движеніе тѣла, вращающагося около оси и относительное движеніе точки .	32
Скорость и ускореніе абсолютнаго движенія 2-го случая . . . . .	33-34
Дополочное ускореніе (ускореніе Кориолиса)	35

Задача II. Опредѣленіе относительнаго движенія точки, когда даны: движеніе тѣла, вращающа- гося около оси и абсолютное движеніе точки	37
---	----

ГЛАВА IV. ДВИЖЕНІЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА, ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ НЕПОДВИЖ- НОЙ ПЛОСКОСТИ ИЛИ ДВИЖЕНІЕ ПЛОСКОЙ НЕИЗМѢНЯЕМОЙ ФИ- ГУРЫ ВЪ ЕЯ ПЛОСКОСТИ . . . . .	38
---	----

§1. Уравненія, связывающія абсолютныя координаты то- чекъ фигуры съ ихъ относительными координатами	38
Опредѣленіе траекторій . . . . .	39
ПРИМѢРЪ 1-Й. Движеніе шарика . . . . .	39
ПРИМѢРЪ 2-ОЙ. Эллиптический циркуль . . . . .	40
§2. Скорости точекъ плоской фигуры . . . . .	44
Мгновенный центръ и его координаты . . . . .	45
Неподвижная и подвижная центроиды . . . . .	46-47

## ГЛАВА V.

§1. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точ- ки . . . . .	48
Формулы, связывающія абсолютныя координаты то- чекъ съ относительными и обратно . . . . .	51

2. Скорости точек тела, вращающегося вокруг неподвижной точки . . . . .	52
Угловая скорость тела, отложенная по мгновенной оси . . . . .	56

ГЛАВА VI. ДВИЖЕНИЕ СВОБОДНАГО ТВЕРДАГО ТѢЛА (общій случай движения твердаго тела) . . . . .	58
---	----

§1. Геометрическое решение . . . . .	58
Винтовое движение . . . . .	60
§2. Аналитическое решение . . . . .	62

ГЛАВА VII. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ВЪ ОБЩЕМЪ СЛУЧАЕ	67
--	----

ГЛАВА VIII. СЛОЖЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ ТВЕРДАГО ТѢЛА . . . . .	69
---	----

§1. Общія положенія . . . . .	69
§2. Сложение поступательныхъ движений . . . . .	70
§3. Сложение движений: вращательнаго вокругъ некоторой оси и поступательнаго по направленію, перпендикулярному къ этой оси . . . . .	71

§4. Сложение вращеній вокругъ параллельныхъ осей . . . . .	74
--	----

Случай I. Сложение вращеній вокругъ параллельныхъ осей въ одну и ту же сторону . . . . .	75
--	----

Случай II. Сложение вращеній вокругъ параллельныхъ осей въ разныя стороны съ различными угловыми скоростями . . . . .	76
---	----

Случай III. Сложение вращеній вокругъ параллельныхъ осей въ разныя стороны съ равными угловыми скоростями . . . . .	73
---	----

§5. Сложение вращеній вокругъ осей, пересѣкающихся въ одной точкѣ . . . . .	79
---	----

Разложеніе вращенія тела на два вращенія вокругъ пересѣкающихся осей . . . . .	82
--	----

Угловая скорость составнаго вращенія . . . . .	83
--	----

Разложеніе угловой скорости . . . . .	85
---------------------------------------	----

# КИВЕТІКА.

## (Динамика точки)

	Стр.
ГЛАВА I. ПРЯМОЛІНІЙНЕ ДВИЖЕНІЕ . . . . .	89
Случай I. Данная сила имѣетъ постоянную величину .	90
Случай II. Сила — функція времени . . . . .	92
Случай III. Сила — функція разстоянія движущейся точки отъ начала координатъ . . . . .	93
ПРИМѢРЪ. Движеніе точки, на которую дѣйствуетъ сила притяженія къ неподвижному центру, про- порціональная разстоянію . . . . .	96
Уравненіе гармоническаго колебанія . . . . .	99
Случай IV. Сила — функція скорости точки . . . . .	102
1-ое рѣшеніе . . . . .	102
2-ое рѣшеніе . . . . .	103
Задача о движеніи тяжелой точки въ сопротивля- ющейся средѣ . . . . .	105
Рѣшеніе нѣхъ случаевъ прямолинейнаго движенія, когда данная сила зависитъ отъ двухъ или трехъ переменныхъ величинъ . . . . .	109
ПРИМѢРЪ 1. Сила есть функція отъ разстоянія и скорости . . . . .	110
Случай первый. "Затухающее" колебательное движеніе . . . . .	111
Случай второй. Приближеніе точки все время къ притягивающему центру . . . . .	113
Случай третий. . . . .	114

ПРИМЕРЪ 2. Сила есть функция отъ времени и раз- стоянія . . . . .	115
--	-----

ГЛАВА II. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНІЕ, ОПРЕДѢЛЕНІЕ КОТОРОГО ПРОВОДИТСЯ КЪ ОПРЕДЕЛЕНІЮ ДВУХЪ ИЛИ ТРЕХЪ ДВИЖЕНІЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХЪ . . . . .	119
Движеніе точки въ плоскости . . . . .	119

ПРИМЕРЪ 1. Криволинейное движеніе точки при дѣйствіи силы тяжести . . . . .	121
--	-----

ПРИМЕРЪ 2. Криволинейное движеніе точки при дѣйствіи силы притяженія къ неподвижному центру, пропорціональной разстоянію . . .	122
--	-----

ПРИМЕРЪ 3. Криволинейное движеніе точки при дѣйствіи силы тяжести въ средѣ, сопротивле- ніе которой пропорціонально первой степени скорости . . . . .	123
--	-----

ПРИМЕРЪ 4. Криволинейное движеніе точки въ сре- дѣ, сопротивленіе которой пропорціонально первой степени скорости, при дѣйствіи силы притяженія къ неподвижному центру, пропор- ціональной разстоянію . . . . .	124
---	-----

НЕПЛОСКОЕ ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ . . . . .	126
------------------------------------	-----

ПРИМЕРЪ. Движеніе точки при дѣйствіи пропорціональ- ныхъ разстоянію силъ притяженія къ неподвижно- му центру и къ центру, движущемуся равномерно по оси . . . . .	127
--	-----

ГЛАВА III. ЗАКОНЪ ЖИВОЙ СИЛЫ . . . . .	130
--	-----

§1. Силы, имѣющія потенціалъ . . . . .	130
--	-----

Силовая функция для силы тяжести . . . . .	131
--	-----

Силовая функция для силы притяженія и отталки- ванія . . . . .	132
---	-----

Свойства силы, импющей потенциал (поверхности уровня) . . . . .	134
Работа силы, импющей потенциал . . . . .	133
§2. "Законъ сохраненія живої силы" или "законъ сохранения полной энергіи точки" . . . . .	139
Интегралъ живої силы . . . . .	140
ГЛАВА IV. "ЗАКОНЪ МОМЕНТОВЪ" ИЛИ "ЗАКОНЪ ПЛОЩАДЕЙ". . .	142
§1. Количество движенія матеріальной точки . . . . .	142
Аналитическія выраженія момента количества движенія относительно оси и относительно точки . . . . .	145
Секторіальная скорость точки . . . . .	146
Аналитическое выраженіе секторіальной скорости . . . . .	147
§2. "Законъ моментовъ" или "законъ площадей" . . . . .	150
Случай I. Сила, приложенная къ точке, заключаетъ въ одной плоскости съ неподвижной осью . . . . .	152
Интегралы площадей . . . . .	153
Случай II. На точку дѣйствуетъ центральная сила. . . . .	154
ГЛАВА V. ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ПРИ ДѢЙСТВІИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ . . . . .	157
§1. Законы площадей и живої силы . . . . .	157
§2. Формула Binet. . . . .	158
§3. Выводъ законовъ Ньютона изъ законовъ Кеплера . . . . .	160
§4. Определеніе движенія планетъ и кометъ подъ вліяніемъ притяженія къ солнцу . . . . .	163
ГЛАВА VI. ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ПО ПОВЕРХНОСТИ . . . . .	174
§1. Условія для скорости и ускоренія точки . . . . .	174
§2. Реакція поверхности и дифференціальные уравненія точки . . . . .	177
§3. Интегралы живої силы и площадей . . . . .	180
§4. Определеніе реакціи или давленія . . . . .	182
§5. Задачи . . . . .	184

Задача I. Движеніе тяжелой точки по гладкой плоскости, составляющей съ горизонтомъ нѣ- который уголъ . . . . .	184
Задача II. Движеніе точки по поверхности кру- лаго конуса подъ вліяніемъ силы притяженія по перпендикулярѣ къ оси этого конуса, со- отно пропорціонально кубу расстоянія точ- ки отъ оси . . . . .	186
Задача III. Определеніе давленія, которое ока- зываетъ на поверхность шара движущаяся по ней тяжелая точка . . . . .	190
§6. Уравненія равнополія точки, находящейся на глад- кой поверхности . . . . .	192
§7. Движеніе точки по негладкой поверхности . . .	193
ПРИМѢРЪ. Прямолинейное движеніе тяжелой точки по негладкой наклонной плоскости . . . . .	196
ГЛАВА VII. ДВИЖЕНІЕ ТОЧКИ ПО КРИВОЙ . . . . .	197
• §1. Дифференціальныя уравненія движенія и реакція кривой . . . . .	197
Реакція кривой . . . . .	201
Давленіе точки на кривую . . . . .	202
§2. Законъ живой силы . . . . .	204
§3. Вторая форма дифференціальныхъ уравненій дви- женія точки по неподвижной кривой . . . . .	205
§4. Математическій (крутовой) маятникъ . . . . .	208
1) Движеніе. Определеніе движенія точки по ок- ружности въ вертикальной плоскости . . . . .	209
Определеніе продолжительности одного размаха .	213
2) Давленіе. Определеніе давленія тяжелой точ- ки на окружности вертикальнаго круга, по кото-	



	Стр.
той происходит колебательное движение . . . . .	216
§5. Циклоidalный маятник . . . . .	216
§6. Равновесие материальной точки на гладкой кривой . . . . .	221
§7. Дифференциальные уравнения движения точки по негладкой кривой . . . . .	221

### КИНЕТИКА СИСТЕМЫ ТОЧЕК.

ГЛАВА I. СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК . . . . .	223
Неизменяемая система . . . . .	225
ГЛАВА II. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ СВОБОДНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК . . . . .	227
§1. Дифференциальные уравнения движения . . . . .	227
§2. Задача двух тел . . . . .	229
ГЛАВА III. ДВИЖЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕСВОБОДНЫХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК . . . . .	237
§1. Кинематическія связи; условия для скорости и ускорения . . . . .	237
§2. Общія уравнения движения системы несвободных материальных точек . . . . .	239
§3. "Возможныя перемещения" или "виртуальныя отклонения" точек системы . . . . .	241
§4. Идеальныя связи и связи с трением . . . . .	246
Уравнения системы с идеальными связями . . . . .	249
§5. Уравнения равновесія системы материальных точек . . . . .	253
ГЛАВА IV. НАЧАЛО ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНІЙ И НАЧАЛО Д'АЛАМБЕРА . . . . .	254

§1. Начало возможных перемещений для случая равновозоя одной точки . . . . .	254
Начало возможных перемещений для случая равновозоя системы точек . . . . .	259
ПРИМЕРЪ. Условіе равновозоя тяжелой нити однородной плотности, подвешенной на двухъ прямыхъ, составляющихъ уголъ съ вертикальной плоскостью . . . . .	261
§2. Начало д'Аламбера для одной точки и системы точекъ . . . . .	262
§3. Начало возможных перемещений для случая движения одной точки и системы точекъ . . . . .	266
ГЛАВА V. ЗАКОНЪ ДВИЖЕНІЯ ЦЕНТРА ИНЕРЦІИ (или "законъ движенія центра тяжести") . . . . .	270
§1. Общій законъ движенія центра инерціи . . . . .	270
Внутреннія и внешнія силы . . . . .	273
§2. Законъ сохраненія движенія центра инерціи . . . . .	273
ГЛАВА VI. ЗАКОНЪ МОМЕНТОВЪ ИЛИ ЗАКОНЪ ПЛОЩАДЕЙ . . . . .	279
§1. Главный моментъ количества движенія точекъ системы и главный моментъ силъ . . . . .	279
§2. Законъ площадей или законъ моментовъ . . . . .	280
Частный случай. Главный моментъ внешнихъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ системы, относительно какой-либо оси равенъ нулю . . . . .	285
§3. "Законъ моментовъ" или "законъ площадей" въ относителномъ движеніи системы по отношенію къ центру инерціи . . . . .	287
Законъ сохраненія площадей въ относительномъ движеніи системы по отношенію къ центру инерціи . . . . .	291

ГЛАВА VII. ЗАКОНЪ ЖИВОЙ СИЛЫ . . . . .	292
§1. Живая сила или кинетическая энергія системы . . . . .	292
Теорема Коепиг'а . . . . .	294
§2. Работа силъ, приложенныхъ къ системѣ . . . . .	296
§3. Законъ живой силы . . . . .	298
§4. Силы, имѣющія потенціалъ . . . . .	301
§5. Интегралъ живой силы. Законъ сохраненія живой силы. Законъ сохраненія полной энергіи . . . . .	305
ГЛАВА VIII. МОМЕНТЫ ИНЕРЦІИ . . . . .	308
§1. Моменты инерціи относительно осей, проходящихъ черезъ начало координатъ. Эллипсоидъ инерціи . . . . .	310
§2. Моменты инерціи относительно параллельныхъ осей . . . . .	316
§3. Примеры опредѣленія моментовъ инерціи тѣлъ од- нородной плотности . . . . .	319
1) Моменты инерціи прямого параллелепипеда . . . . .	319
2) Моменты инерціи круглаго цилиндра . . . . .	320
3) Моменты инерціи шара . . . . .	322
ГЛАВА IX. ДВИЖЕНІЕ ТВЕРДАГО ТѢЛА . . . . .	324
§1. Поступательное движеніе твердаго тѣла . . . . .	326
§2. Брашеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной оси . . . . .	327
Физическій маятникъ . . . . .	329
Приведенная длина физическаго маятника . . . . .	331
Оборотный маятникъ . . . . .	333
§3. Давленіе вращающагося твердаго тѣла на ось . . . . .	333
ПРИМѢРЪ. Опредѣленіе давленія на ось вращающагося твердаго тѣла, равномерно вращающагося во- кругъ вертикальной оси . . . . .	337
§4. Свойства главныхъ осей инерціи вращающагося тѣ- ла . . . . .	339
§5. Движеніе твердаго тѣла, параллельное неподвиж- ной плоскости . . . . .	344

Скольженіе, катаніе и скольженіе, соединенное съ катаніемъ . . . . .	345
ПРИМѢРЪ. Движеніе наклоннаго однороднаго крутила- го цилиндра по наклонной плоскости, пред- полагая, что существуютъ тренія между ци- линдромъ и плоскостью . . . . .	345
ГЛАВА I. ТЕОРІЯ УДАРА . . . . .	348
§1. Измѣненіе количества движенія и импульсъ силы . . . . .	348
§2. Ударъ точки о поверхность . . . . .	353
§3. Соудареніе шаровъ . . . . .	356
Случай I. Ударъ совершенно неупругихъ шаровъ . . . . .	357
Случай II. Ударъ совершенно упругихъ шаровъ . . . . .	359
Случай III. Ударъ не вполне упругихъ шаровъ . . . . .	360
§4. Косой ударъ . . . . .	362
§5. Дѣйствіе удара на твердое тѣло, вращающееся вокругъ неподвижной оси . . . . .	364
Баллистическій маятникъ . . . . .	370









2-70

